Calculs de déterminants.

1. Calculer les déterminants d'ordre n :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)} \quad ; \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)} .$$

- -

a. Pour calculer D, on retranche à chaque colonne la précédente : $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$ $(2 \leq j \leq n)$, on développe ensuite par rapport à la dernière ligne, ce qui conduit au déterminant d'une matrice triangulaire inférieure (qui est donc le produit de ses éléments diagonaux) :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & \dots & n \\ n & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-1 & n \\ n & \dots & \dots & n & n \end{vmatrix}_{(n)} = \begin{vmatrix} 1 & n-1 & 0 & \dots & 0 \\ n & 2-n & n-2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 1 \\ n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{(n)} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} n-1 & & & (0) \\ 2-n & n-2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix}_{(n-1)} .$$

Donc $D = (-1)^{n+1}\, n!$

b. Pour calculer Δ, on fait agir sur les colonnes (ou lignes) une "permutation-miroir" $\sigma : (1, 2, \cdots, n-1, n) \mapsto (n, n-1, \cdots, 2, 1)$, qui est le produit des $\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ "transpositions" échangeant j et $n-j+1$, avec $1 \leq j \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$. Ainsi, les a se trouvent sur la diagonale prncipale. Ensuite, on peut observer que la somme des éléments de chaque colonne de la matrice est $a+n-1$, ce qui permettra de "sortir" ce facteur $a+n-1$ du déterminant après avoir effectué l'opération $L_1 \leftarrow L_1 + (L_2 + \cdots + L_n)$. On effctuera ensuite les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_1$ $(2 \leq j \leq n)$ pour se ramener à une matrice triangulaire inférieure.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & a \\ 1 & 1 & \dots & a & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a & \dots & 1 & 1 \\ a & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \begin{vmatrix} a & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & a \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & a & & (1) \\ & & \ddots & \\ (1) & & & a \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1) \begin{vmatrix} 1 & & & (0) \\ 1 & a-1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & (0) & & a-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} (a+n-1)\,(a-1)^{n-1} .$$

---

2. Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(n)}$, puis $\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & n & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}_{(n)}$. On exprimera le résultat à l'aide du nombre $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

- -

• Les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ $(2 \leq i \leq n)$, suivies d'un développement par rapport à la dernière colonne, qui ramènent à une matrice triangulaire supérieure, donnent

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 3 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & n-1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}_{(n)} = (-1)^{1+n}(-1)^{n-1}(n-1)! = (n-1)!$$

• Ensuite, on décompose la dernière colonne de Δ_n en $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n \end{pmatrix}$.

La linéarité du déterminant d'une matrice par rapport à sa dernière colonne donne alors

$$\textbf{(*)} : \qquad \Delta_n = D_n + \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}_{(n)} = (n-1)! + n\,\Delta_{n-1} \,,$$

après un développement par rapport à la dernière colonne du deuxième déterminant obtenu. En divisant par $n!$ la relation **(*)**, on tire $\dfrac{\Delta_n}{n!} = \dfrac{\Delta_{n-1}}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n}$, d'où l'on déduit par télescopage, que $\dfrac{\Delta_n}{n!} = \dfrac{\Delta_1}{1!} + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 + (H_n - 1)$. Finalement,

$$\Delta_n = n!\,(1 + H_n)\,.$$

---

3. Soient a_1, a_2, …, a_n, b, c des réels avec $b \neq c$. Montrer que le déterminant

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & c + x & \dots & c + x \\ b + x & a_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c + x \\ b + x & \dots & b + x & a_n + x \end{vmatrix}_{(n)}$$

est une fonction affine du réel x. En déduire la valeur de $D(0)$.

- -

Transformons $D(x)$ en effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$ $(2 \leq i \leq n)$. On obtient alors $D(x) = \begin{vmatrix} a_1 + x & c + x & \dots & c + x \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$, où les $\alpha_{i,j}$ $(2 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n)$ sont des scalaires (indépendants de la variable x). En développant ce déterminant par rapport à la première ligne, on obtient alors

$$D(x) = (a_1 + x)\,\gamma_{1,1} + (c + x)\,\sum_{j=2}^{n} \gamma_{1,j}\ ,$$

où les cofacteurs $\gamma_{1,j}$ $(1 \le j \le n)$ sont indépendants de x. On voit alors que $D(x)$ peut se mettre sous la forme $Ax + B$, où A et B sont des constantes, c'est donc une fonction affine de la variable x.

Remarquons que, pour les valeurs $x = -b$ et $x = -c$, les matrices obtenues sont triangulaires, d'où le système

$$\begin{cases} D(-b) \ = \ -b \ \alpha \ +\beta \ = \ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i - b) \\ D(-c) \ = \ -c \ \alpha \ +\beta \ = \ \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(a_i - c) \end{cases},$$

qui conduit à

$$D(0) = \beta = \frac{1}{b-c}\left[b \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - c) - c \cdot \prod_{i=1}^{n}(a_i - b)\right] .$$

---

4. Soit la matrice $A = (a_{i,j})_{0 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $a_{i,j} = \binom{i+j}{i}$. Calculer $\det(A)$.

- -

$$\text{On a } \det(A) = D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n+1}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n+1}{n} & \cdots & \binom{2n}{n} \end{vmatrix}_{(n+1)} .$$

En vertu de la formule de Pascal $\binom{i+j}{i} - \binom{i+j-1}{i} = \binom{i+j-1}{i-1}$, si l'on effectue les opérations $C_j \leftarrow C_j - C_{j-1}$, pour j allant de n à 1 en décroissant, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{0}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ \binom{1}{1} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{2n-1}{n-1} \end{vmatrix}_{(n+1)} .$$

On développe alors par rapport à la première ligne, puis on effectue les opérations $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1}$ pour i allant de n à 1 en décroissant. De nouveau avec la formule de Pascal, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n}{n-1} & \cdots & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}_{(n)} .$$

Comme les coefficients de la première ligne valent tous 1, on a finalement $D_{n+1} = D_n$. Avec $D_1 = 1$, on conclut que $D_n = 1$ pour tout n.

---

5. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} 2\cos x & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2\cos x \end{vmatrix} .$$

- -

En développant par rapport à la première ligne, on obtient la relation de récurrence linéaire d'ordre deux:

$$(\mathbf{R}) \quad : \qquad D_n(x) = 2\ \cos x \cdot D_{n-1}(x) - D_{n-2}(x) \qquad \text{pour} \quad n \geq 3 .$$

L'équation caractéristique **(C)** : $r^2 - (2\ \cos x)\, r + 1 = 0$ a deux racines **distinctes** e^{ix} et e^{-ix} si x est un réel non multiple de π ; les solutions de **(R)** s'expriment alors sous la forme

$$D_n(x) = A(x)\, e^{inx} + B(x)\, e^{-inx} = \lambda(x)\ \cos nx + \mu(x)\ \sin nx .$$

L'initialisation par $D_1(x) = 2\cos x$ et $D_2(x) = 4\cos^2 x - 1$ donne $\lambda(x) = 1$, $\mu(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ et, après simplifications,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\,\mathbf{Z} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad D_n(x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} .$$

Lorsque $x = k\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on peut :
- soit reprendre la méthode algébrique ci-dessus, mais l'équation caractéristique ayant cette fois une racine double (1 si k est pair, -1 si k est impair). Je rappelle l'expression de D_n dans ce cas (**elle est à connaître!!!**) : $D_n = (A + Bn)\, r_0^n$;
- soit utiliser le fait (après l'avoir justifié) que la fonction $x \mapsto D_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On obtient $D_n(k\pi) = (-1)^{nk}\,(n+1)$.

Exercices théoriques.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $M \mapsto AM$. Calculer la trace et le déterminant de φ_A.

- -

Considérons la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$), que nous allons ordonner de la façon suivante:

$$\mathcal{B} = \big(E_{1,1}, E_{2,1}, \cdots, E_{n,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, \cdots, E_{n,2}, \cdots\cdots\cdots, E_{1,n}, E_{2,n}, \cdots, E_{n,n}\big) .$$

Si $A = (a_{k,l}) = \displaystyle\sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l}$, on calcule

$$\varphi_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} E_{k,l} E_{i,j} = \sum_{k,l} a_{k,l} \delta_{i,l} E_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i} E_{k,j} .$$

Le lecteur courageux, en représentant sur sa feuille de brouillon une grosse matrice de format $n^2 \times n^2$, s'apercevra que la matrice de l'endomorphisme φ_A relativement à la base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale par blocs, précisément constituée de n blocs diagonaux tous égaux à la matrice A. On en déduit que

$$\mathrm{tr}(\varphi_A) = n \cdot \mathrm{tr}(A) \qquad \text{et} \qquad \det(\varphi_A) = (\det A)^n .$$

---

7. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

a. Calculer $AA^\top$. En déduire $\det(A)$.

b*. Soient n et p deux entiers naturels. On suppose que n et p peuvent chacun s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels. Montrer que l'entier np est aussi somme de quatre carrés d'entiers naturels.

- -

a. On calcule $AA^\top = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\, I_4$. On a donc

$$\det(AA^\top) = \det(A)\ \det(A^\top) = (\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4 .$$

Donc $\det(A) = \pm(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$. Par ailleurs, les réels b, c, d étant fixés, on voit que

$$\det(A) = \det(aI_4 - M) = \chi_M(a) , \quad \text{avec} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -b & -c & -d \\ b & 0 & d & -c \\ c & -d & 0 & b \\ d & c & -b & 0 \end{pmatrix} .$$

Le cours sur le polynôme caractéristique indique alors que $a \mapsto \det(A)$ est une fonction polynomiale de degré 4, unitaire, donc $\det(A) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

b. Supposons $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $p = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$ avec a, b, c, d, e, f, g, h entiers naturels. On a alors $n^2 = \det(A)$ et $p^2 = \det(B)$, avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} e & f & g & h \\ -f & e & -h & g \\ -g & h & e & -f \\ -h & -g & f & e \end{pmatrix} .$$

Le lecteur courageux vérifiera que $AB = C$, avec $C = \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$, en posant

$$\begin{cases} x &= ae - bf - cg - dh \\ y &= af + be + ch - dg \\ z &= ag - bh + ce + df \\ t &= ah + bg - cf + de \end{cases} .$$

Donc $(np)^2 = n^2p^2 = \det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ et, en considérant les signes, on voit que $np = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$. Les nombres x, y, z, t étant des entiers relatifs, on conclut que np est la somme des carrés des quatre entiers naturels $|x|$, $|y|$, $|z|$, $|t|$.

---

8. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices réelles. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$:

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad PA = BP .$$

En décomposant P en $P = Q + iR$, où Q et R sont des matrices réelles, et en considérant l'application $f : \lambda \mapsto \det(Q + \lambda R)$, montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$, i.e.

$$\exists S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \qquad SA = BS .$$

- -

En prenant parties réelle et imaginaire de la relation $PA = BP$ (qui est équivalente à $A = P^{-1}BP$), on obtient respectivement **(1):** $QA = BQ$ et **(2):** $RA = BR$. La combinaison linéaire $(\mathbf{1}) + \lambda \times (\mathbf{2})$ donne alors $(Q + \lambda R)A = B(Q + \lambda R)$ pour tout réel λ.

Si $z \in \mathbb{C}$, la matrice $Q + zR$ a des coefficients $q_{i,j} + z\,r_{i,j}$ qui sont des fonctions polynomiales (en fait, affines, i.e. polynomiales de degré au plus 1) de la variable z. On sait qu'alors l'application $z \mapsto \det(Q + zR)$ est aussi polynomiale, i.e.

$$\exists F \in \mathbb{C}[X] \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad \det(Q + zR) = F(z) .$$

Ce polynôme F n'est pas le polynôme nul puisque, la matrice $P = Q + iR$ étant supposée inversible, on a $F(i) = \det(P) \neq 0$. Le polynôme F a donc un nombre fini de racines, il existe donc au moins un réel λ (et même une infinité de tels λ) pour lequel $F(\lambda) \neq 0$, i.e. la matrice réelle $S = Q + \lambda R$ est inversible. La relation $SA = BS$, écrite plus haut, peut alors s'écrire sous la forme $A = S^{-1}BS$, avec $S = Q + \lambda R \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, et cela prouve que les matrices A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

---

9. Dans l'espace $E = \mathbb{R}^3$, montrer que quatre points A, B, C, D sont coplanaires (appartiennent à un même "plan affine") si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_C & y_C & z_C \\ 1 & x_D & y_D & z_D \end{vmatrix}$ est nul.

- -

Les quatre points sont coplanaires si et seulement si les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont liés. Or,

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 1 & x_B & y_B & z_B \\ 1 & x_C & y_C & z_C \\ 1 & x_D & y_D & z_D \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & x_A & y_A & z_A \\ 0 & x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ 0 & x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ 0 & x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ x_D - x_A & y_D - y_A & z_D - z_A \end{vmatrix} \\
&= \det_{\mathcal{B}_0}\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right),
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La conclusion est immédiate.

Déterminants de Vandermonde et assimilés.

10. Soient a_0, a_1, …, a_n des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille de polynômes $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ où, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P_i(X) = (X + a_i)^n$, est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. *On pourra utiliser un déterminant de Vandermonde.*

- -

La famille $\mathcal{P} = (P_0, \cdots, P_n)$ est de cardinal $n+1$ dans l'espace $\mathbb{K}_n[X]$ de dimension $n+1$. Soit $\mathcal{X} = (X^n, X^{n-1}, \cdots, X, 1)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ (dans un ordre inversé pour que ça soit plus joli), on va montrer que le déterminant de la famille de vecteurs $\mathcal{P}$ relativement à la base $\mathcal{X}$ est non nul. Pour cela, développons les polynômes P_j par la formule du binôme de Newton :

$$P_j = (X + a_j)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_j^{n-i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} a_j^{n-i} X^i .$$

On voit ainsi que

$$\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0} & \binom{n}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} a_0 & \binom{n}{1} a_1 & \cdots & \binom{n}{1} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{n} a_0^n & \binom{n}{n} a_1^n & \cdots & \binom{n}{n} a_n^n \end{vmatrix}_{(n+1)} = \left[\prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\right] V_{n+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n) ,$$

où $V_{n+1}(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ est le déterminant de Vandermonde des $n+1$ nombres $a_0, \cdots, a_n$. Ces $n+1$ nombres étant deux à deux distincts, les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ étant par ailleurs non nuls, on a $\det_{\mathcal{X}}(\mathcal{P}) \neq 0$, et la famille $\mathcal{P}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

11*. Déterminants de Cauchy et de Hilbert

On considère des réels $a_1, \cdots, a_n$ et $b_1, \cdots, b_n$. On suppose que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a $a_i + b_j \neq 0$. Soit la matrice $C = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $c_{i,j} = \dfrac{1}{a_i + b_j}$. Calculer le déterminant de la matrice C. *On pourra commencer par effectuer les opérations élémentaires sur les colonnes* $C_j \leftarrow C_j - C_n$, *avec* $1 \leq j \leq n-1$. Calculer en particulier le déterminant de $H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j}$.

Déterminants de matrices par blocs.

12. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ des matrices. On suppose que A est inversible. On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\det M = \det A \cdot \det(D - CA^{-1}B) .$$

- -

Réponse parachutée : $M = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ CA^{-1} & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, d'où le résultat!

---

13. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. À quelle condition la matrice M est-elle inversible ? Donner son inverse si c'est possible.

- -

• Des opérations élémentaires de type "transvection" (qui ne modifient pas le déterminant), effectuées d'abord sur les colonnes, puis sur les lignes, donnent

$$\det(M) = \det \begin{pmatrix} I_n + A & A \\ I_n + A & I_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_n + A & A \\ 0 & I_n - A \end{pmatrix} = \det(I_n + A) \cdot \det(I_n - A) ,$$

puisque l'on se ramène à une matrice triangulaire par blocs. On en déduit que M est inversible **si et seulement si** les matrices $I_n + A$ et $I_n - A$ sont toutes deux inversibles (i.e. **ssi** $\mathrm{Sp}(A) \cap \{-1, 1\} = \emptyset$).

• Si cette condition est satisfaite, on peut envisager différentes méthodes pour inverser M, et ces différentes méthodes ne conduisent pas toujours (en tout cas, pas directement) à la même expression du résultat.

$\triangleright$ On peut rechercher M^{-1} sous la forme $N = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$, où les quatre blocs sont carrés d'ordre n. Alors

$$MN = I_{2n} \iff \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} E + AG &= I_n \quad (\mathbf{1}) \\ F + AH &= 0 \quad (\mathbf{2}) \\ AE + G &= 0 \quad (\mathbf{3}) \\ AF + H &= I_n \quad (\mathbf{4}) \end{cases} .$$

Les combinaisons linéaires **(1)+(3)**, **(2)+(4)**, **(1)-(3)**, **(4)-(2)** donnent

$$E + G = F + H = (I_n + A)^{-1} \quad \text{et} \quad E - G = H - F = (I_n - A)^{-1} ,$$

d'où

$$E = H = \frac{1}{2}\Big((I_n + A)^{-1} + (I_n - A)^{-1}\Big) \quad \text{et} \quad G = F = \frac{1}{2}\Big((I_n + A)^{-1} - (I_n - A)^{-1}\Big) .$$

$\triangleright$ On aurait pu aussi inverser le système $MX = X'$, en posant $X = \begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} Y' \\ Z' \end{pmatrix}$. Les calculs sont laissés au lecteur (*ouf!*), qui devrait trouver

$$E = H = (I_n - A^2)^{-1} \quad \text{et} \quad F = G = -A(I_n - A^2)^{-1} .$$

Le même lecteur, s'il est toujours vivant, vérifiera que c'est en fait la même chose que ce que l'on obtient par la première méthode.

---

14. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que u et v commutent, et que v est nilpotent. On souhaite montrer par récurrence sur l'entier n la propriété $\det(u + v) = \det(u)$.

a. Traiter le cas $n = 1$.

b. Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et de v dans une base de E adaptée à $\mathrm{Im}(v)$.

c. Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux endomorphismes induits par u et v sur $\mathrm{Im}(v)$.

- -

a. Le seul endomorphisme nilpotent en dimension 1 est l'endomorphisme nul ($v = 0$), donc la propriété est évidente.

b. Soit $r = \mathrm{rg}(v)$, soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à $\mathrm{Im}(v)$. Comme u commute avec v, il laisse stable le sous-espace $\mathrm{Im}(v)$, donc $U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est de la forme $U = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec A carrée d'ordre r. Enfin, $V = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ est de la forme $V = \begin{pmatrix} E & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec E carrée d'ordre r.

c. Raisonnons par récurrence forte (initialisée en **a.**). Soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie dans tout espace vectoriel de dimension k avec $1 \leq k \leq n-1$. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension n, vérifiant les hypothèses de l'énoncé, avec $v \neq 0$ (sinon, c'est évident). Notons u' et v' les endomorphismes induits par u et v respectivement sur $\mathrm{Im}(v)$. Il est clair que u' et v' commutent, et que v' est nilpotent. Comme $\mathrm{Im}(v)$ est de dimension r avec $1 \leq r \leq n-1$ (un endomorphisme nilpotent ne peut être bijectif, il est donc de rang strictement inférieur à n), on peut appliquer l'hypothèse de récurrence qui affirme que $\det(u' + v') = \det(u')$. Matriciellement, avec les notations de la question **b.**, cela se traduit par $\det(A+E) = \det(A)$. Comme $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u+v) = U+V = \begin{pmatrix} A+E & B+F \\ 0 & D \end{pmatrix}$, on a alors

$$\begin{aligned} \det(u+v) &= \det(U+V) = \det(A+E)\cdot\det(D) \\ &= \det(A)\cdot\det(D) = \det(U) = \det(u)\ , \end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.