PROBLÈME

- On dira qu'une fonction f, définie sur l'intervalle ouvert $]0,1[$, vérifie la propriété **(P1)** si on a

$$(\mathbf{P1}) \ : \qquad \forall x \in]0,1[\quad f(1-x) = -f(x)\ .$$

On dira qu'elle vérifie la propriété **(P2)** si on a

$$(\mathbf{P2}) \ : \qquad \forall x \in]0,1[\quad f(x) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)\ .$$

- Pour tout réel x non multiple de π, on définit la **cotangente** du réel x par la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus (\pi\,\mathbf{Z}) \qquad \mathrm{cotan}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\ .$$

On définit la fonction g sur $]0,1[$ par

$$\forall x \in]0,1[\qquad g(x) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi x)\ .$$

- Par ailleurs, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, on pose

$$u_0(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2}\ .$$

PARTIE A. Étude de la somme d'une série de fonctions.

1. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$. On notera $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la fonction somme:

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \qquad s(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}\ .$$

2. Montrer que la fonction s est continue sur $]0,1[$.

3. Montrer que, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, on a $s(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n(x)$, en posant

$$s_n(x) = \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x-(n-1)} + \cdots + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \cdots + \frac{1}{x+n-1} + \frac{1}{x+n}$$

ce que l'on pourra noter $s_n(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}$.

4. En déduire que la fonction $s : \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \to \mathbb{R}$ est 1-périodique.

5. Étudier la parité de la fonction s. En déduire que s vérifie la propriété **(P1)** sur l'intervalle $]0,1[$.

6. Montrer que la fonction s vérifie aussi la propriété **(P2)** sur $]0,1[$.

PARTIE B. Une première identité eulérienne.

7. Simplifier les expressions $\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ pour θ réel, puis montrer que la fonction g vérifie les propriétés **(P1)** et **(P2)** sur $]0,1[$. Interpréter graphiquement la propriété **(P1)**.

8. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$, et calculer sa somme S. Montrer que, pour $x \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a $\left|s(x) - \dfrac{1}{x}\right| \leq 4x$. En déduire que l'expression $s(x) - \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures, et préciser cette limite.

9. À l'aide de développements limités, montrer que la fonction $x \mapsto g(x) - \dfrac{1}{x}$ admet une limite finie en 0.

10. Déduire de ce qui précède que la fonction $h = s - g$ est prolongeable en une fonction continue (que l'on notera toujours h) sur le segment $[0,1]$. Préciser alors la valeur de $h(0)$.

11. On note $M = \|h\|_{\infty,[0,1]} = \max\limits_{x \in [0,1]} \big|h(x)\big|$. Justifier l'existence de M. Soit x_0 un réel de $[0,1]$ tel que $\big|h(x_0)\big| = M$. En utilisant la propriété **(P2)**, montrer que $\left|h\left(\dfrac{x_0}{2}\right)\right| = M$, puis que $M = \big|h(0)\big|$.

12. En déduire l'identité

$$\forall x \in]0,1[\qquad \pi \ \mathrm{cotan}(\pi x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2} \ .$$

13. Montrer que cette dernière relation est vraie en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

PARTIE C. Conséquences de cette identité.

14. Démontrer la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z} \qquad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right) \ .$$

15. À l'aide d'une des questions précédentes, retrouver la valeur de la somme $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

PARTIE D. Formule d'Euler-Wallis.

16. Soit x un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$. Montrer que les fonctions u_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont prolongeables en des fonctions continues sur $[0,x]$, et que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n$ est alors normalement convergente sur le segment $[0,x]$.

17. En déduire, à l'aide de la question **12.**, la relation

$$\forall x \in]0,1[\qquad \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) \ .$$

On rappelle que, si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels non nuls, on dit que " le **produit infini** $\displaystyle\prod_{n \geq 1} a_n$ **est convergent**" si la suite (P_n) définie par $P_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k$ admet une limite réelle non nulle. Dans ce cas, le réel $P = \lim\limits_{n \to +\infty} P_n$ est appelé **produit infini** des a_n et on note alors $P = \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n \to +\infty} P_n$.

18. Déduire de la question **17.** une écriture de $\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ sous forme de produit infini, valable pour $x \in]0,1[$.

19. Donner la valeur du produit infini $P = \displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right)$.