

SUITES et SÉRIES de FONCTIONS

I. Suites de fonctions

1. Les modes de convergence.

a. La convergence simple.

Définition. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} , soit f une fonction de I vers \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions (f_n) **converge simplement** sur I vers la fonction f si on a

$$\forall x \in I \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

Avantage. Comme son nom l'indique, ce mode de convergence est très simple à définir et à vérifier. On peut le qualifier de convergence "ponctuelle": pour prouver la convergence simple de (f_n) vers f , on fixe un point x dans I et on étudie la suite de terme général $f_n(x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

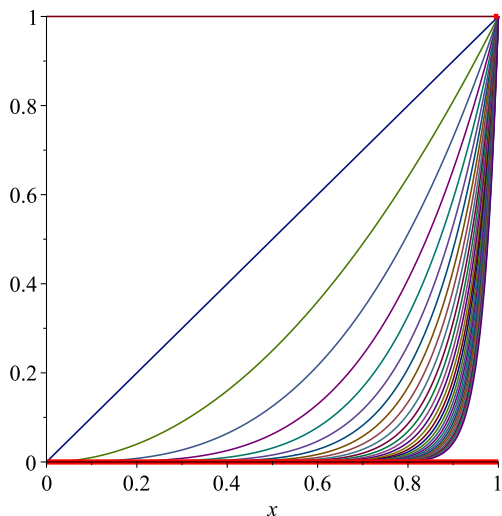
Inconvénients. Ils sont malheureusement assez nombreux: la convergence simple ne conserve pas les propriétés des fonctions de la suite (f_n) , comme la continuité, la dérivabilité, et ne permet pas d'intervertir par exemple limite et intégrale. On va le voir sur les exemples suivants.

Exemple 1. Soit $I = [0, 1]$. Pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^n$. Si on fixe un réel x de $[0, 1]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison x . On a facilement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}. \text{ La suite } (f_n) \text{ converge donc simplement sur } I = [0, 1] \text{ vers}$$

la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. On observe que chaque fonction f_n est continue sur I , mais la fonction "limite simple" f présente une discontinuité au point 1.

Moralité. La convergence simple ne conserve pas la continuité des fonctions.



Exemple 2. Soit $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, posons $f_n(x) = (n+1) \sin(x) \cos^n(x)$ pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On observe que, pour tout $x \in I$ fixé, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$: c'est évident pour $x = 0$, cela résulte de croissances comparées entre suites géométriques et suites affines pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur I .

Or, un calcul simple montre que, pour tout n entier naturel,

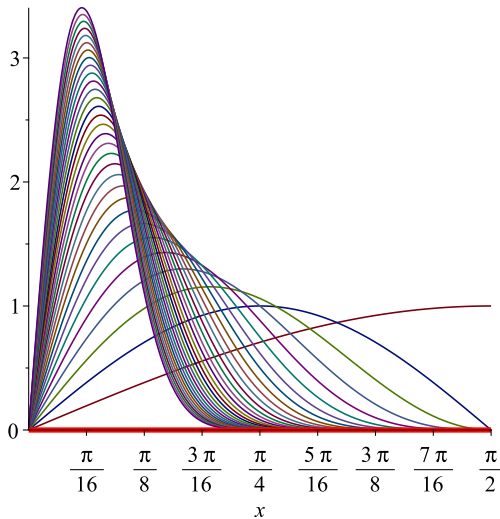
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) \sin(x) \cos^n(x) dx = \left[-\cos^{n+1}(x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

autrement dit l'aire sous la courbe est constante, de valeur 1. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx = 1$.

Mais $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0$. La limite des intégrales n'est donc pas égale à l'intégrale de la limite, i.e. (sur cet exemple)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x) dx \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Moralité. La convergence simple ne permet pas d'invertir limite et intégrale.



Remarque. Une observation du graphique dans cet exemple 2 montre que l'aire sous la courbe reste constante, mais qu'elle tend à se concentrer au voisinage de l'origine, il y a formation d'une "bosse grimpanche" (de plus en plus étroite, mais aussi de plus en plus haute). Nous reviendrons sur cet exemple dans le paragraphe suivant.

b. La convergence uniforme.

Pour la définir, nous allons introduire une notation: si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction bornée, nous poserons $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$. S'il peut avoir ambiguïté sur l'intervalle d'étude, nous

noterons $\|f\|_{\infty, I}$ cette "norme infinie". Sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I , $\|\cdot\|_\infty$ est une norme appelée **norme de la convergence uniforme**, nous y reviendrons. *La notion générale de norme sur un espace vectoriel sera étudiée prochainement.*

Pour une fonction f non bornée, on pose parfois $\|f\|_\infty = +\infty$.

Définition. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} , soit f une fonction de I vers \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions (f_n) **converge uniformément** sur I vers la fonction f si les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I pour n assez grand, et si on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0,$$

i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$

Proposition. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Preuve. Si (f_n) converge uniformément vers f sur I , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. Or, si on fixe $x_0 \in I$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Du théorème d'encadrement, on déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_0) - f(x_0)| = 0$, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, on a ainsi prouvé la convergence simple de (f_n) vers f .

Bien sûr, la réciproque est fautive. Nous allons reprendre les exemples 1 et 2 du paragraphe précédent et constater qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Exemple 1. On a $f_n(x) - f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$. Comme, pour tout n , $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^n = 1$,

on a donc $\|f_n - f\|_\infty = 1$ (cette borne supérieure n'est pas atteinte), donc $\|f_n - f\|_\infty$ ne tend pas vers 0, il n'y a pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.

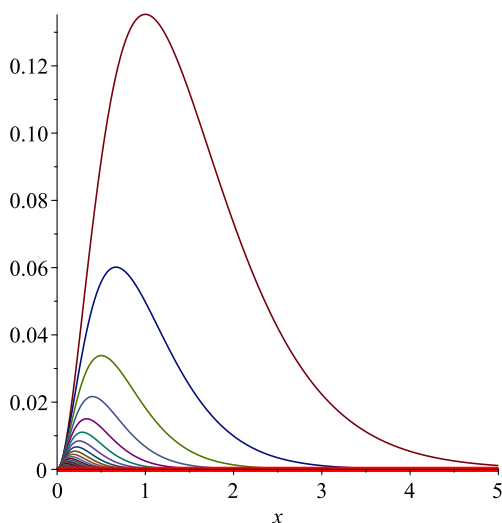
Exemple 2. Les détails de calcul sont laissés en exercice. Comme la fonction limite simple est $f = 0$, on a donc $f_n - f = f_n$ pour tout n . Cette fonction f_n est nulle aux bornes de l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, positive sur I , et une étude des variations montre que f_n atteint son maximum au point $x_n = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Donc

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty = f_n(x_n) = \sqrt{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad (\text{après quelques calculs}).$$

On en déduit que $\|f_n - f\|_\infty \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{n}{e}}$, et donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = +\infty$, il n'y a pas convergence uniforme de (f_n) vers la fonction nulle sur I .

Voici maintenant un exemple où il y a convergence uniforme.

Exemple 3. Soit $I = \mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$. Alors, en séparant les cas $x = 0$ et $x > 0$, on prouve facilement la convergence simple de la suite (f_n) vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ . On fait ensuite une étude des variations de la fonction $f_n - 0 = f_n$: cette fonction est positive sur I , nulle en 0 et de limite nulle en $+\infty$, et $f'_n(x) = (2 - nx) x e^{-nx}$. On en déduit facilement que $\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2} e^{-2}$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, il y a donc convergence uniforme sur \mathbb{R}_+ vers la fonction nulle.



Remarque pratique. Idée de majoration uniforme. Pour démontrer qu'une suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f , on peut essayer, comme dans les trois exemples ci-dessus, de calculer $\|f_n - f\|_\infty$ afin de montrer que cette expression tend vers 0, mais il n'est pas toujours facile de calculer explicitement $\|f_n - f\|_\infty$. On peut aussi tenter d'obtenir une **majoration uniforme** de $|f_n(x) - f(x)|$, i.e. une majoration par une expression α_n ne dépendant pas de la variable x , alors cette majoration "passera au sup", c'est-à-dire donnera une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$.

Précisons: s'il existe une suite positive (α_n) tendant vers 0 telle que

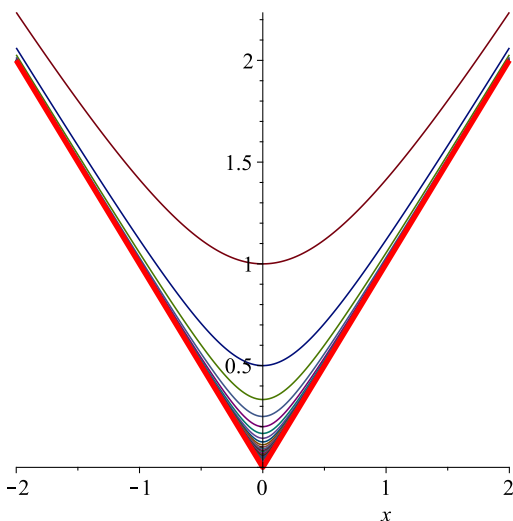
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n,$$

alors (f_n) converge uniformément vers f sur I : En effet, le fait que l'inégalité ci-dessus soit vraie pour tout x de I entraîne que α_n majore aussi la borne supérieure sur I de la fonction $|f_n - f|$, donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \alpha_n$, et le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Exemple 4. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$. Il est clair que, pour tout x réel, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. Posons alors $f(x) = |x|$, la fonction valeur absolue est la limite simple de la suite (f_n) sur \mathbb{R} . Mais, en utilisant l'expression conjuguée, on voit que, pour tout x réel,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{n}.$$

Cette majoration est **uniforme**, i.e. elle est valable pour tout x , donc elle "passe au sup", on a ainsi $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ pour tout n , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, et on a prouvé la convergence uniforme sur \mathbb{R} de (f_n) vers f .



c. La convergence uniforme sur tout segment.

Nous rencontrerons de fréquentes situations où l'intervalle I n'est pas un segment (intervalle fermé borné), où une suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f , la convergence n'étant pas uniforme sur I , mais étant **uniforme sur tout segment de I** , c'est-à-dire sur tout segment inclus dans I .

Exemple 1. Soit $I =]-1, 1[$, posons $f_n(x) = x^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in I$. Pour tout x fixé dans I , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, la suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur I vers la fonction nulle $f = 0$. La convergence n'est pas uniforme sur I puisque, pour tout n , on a $\|f_n - f\|_{\infty, I} = \sup_{x \in]-1, 1[} |x^n| = 1$ (qui ne tend pas vers 0). Elle est toutefois uniforme sur tout segment de I . En effet, si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans I , on a donc $-1 < a \leq b < 1$, en posant $r = \max\{|a|, |b|\}$, on a alors $0 \leq r < 1$ et on a la majoration uniforme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in S \quad |f_n(x) - f(x)| = |x^n| \leq r^n$$

(qui entraîne que $\|f_n - f\|_{\infty, S} \leq r^n$) et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r^n = 0$, on a prouvé la convergence uniforme de (f_n) vers la fonction nulle sur S , donc sur tout segment inclus dans I .

Exemple 2. Soit $I = \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$, on pose $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction exponentielle $f : x \mapsto e^x$. La convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur \mathbb{R}_+ car, pour tout n donné, par croissances comparées des fonctions polynomiales et exponentielles, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - f_n(x)) = +\infty$, la fonction $f_n - f$ n'est donc pas bornée sur \mathbb{R}_+ , i.e. $\|f_n - f\|_{\infty, I} = +\infty$.

Fixons maintenant $a > 0$ et montrons que la convergence est uniforme sur le segment $S = [0, a]$ (ce qui entraînera la convergence uniforme sur tout segment, puisque tout segment de \mathbb{R}_+ est inclus dans un segment de la forme $[0, a]$). Posons $g_n(x) = f(x) - f_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in S$. Alors g_n prend des valeurs positives sur S puisque,

de l'inégalité usuelle $\ln(1+u) \leq u$ pour $u \in]-1, +\infty[$, on déduit que $n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x$ puis, en prenant l'exponentielle, que $f_n(x) \leq f(x)$. Étudions les variations de g_n : on a

$$\forall x \in S \quad g'_n(x) = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} \geq e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = g_n(x) \geq 0,$$

la fonction g_n est donc positive et croissante sur S , d'où

$$\|f_n - f\|_{\infty, S} = \|g_n\|_{\infty, S} = \max_{x \in S} |g_n(x)| = g_n(a) = e^a - \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

on a donc prouvé la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction f sur le segment $S = [0, a]$, donc sur tout segment de \mathbb{R}_+ .

2. Les théorèmes (régularité de la limite d'une suite de fonctions).

a. Le théorème de continuité.

On a vu que la convergence simple "ne conserve pas la continuité", il en va autrement de la convergence uniforme.

Théorème 1. Si une suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur I , si chaque fonction f_n est continue sur I , alors f est continue sur I .

Preuve. Soit a un point de I , montrons la continuité de f au point a , i.e. montrons que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Rappelons qu'il faut prouver que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - a| \leq \alpha \implies |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Donnons-nous donc $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$, il existe alors un entier N tel que $\|f_N - f\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $x \in I$, on a alors par l'inégalité triangulaire,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)|.$$

Le premier et le dernier terme sont majorés par $\frac{\varepsilon}{3}$. Comme la fonction f_N est continue en a , il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout x dans I tel que $|x - a| \leq \alpha$, on ait $|f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Pour un tel x , on aura bien $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$, ce qui termine la preuve.

On peut affaiblir un peu l'hypothèse faite dans ce théorème 1. En effet, il suffit que la convergence de la suite (f_n) vers f soit **uniforme sur tout segment** de I . Cela résulte du caractère local de la continuité: une fonction est continue sur I si elle est continue en tout point de I et, pour savoir si elle est continue en un point a , il suffit de connaître la fonction "au voisinage de a ", c'est-à-dire par exemple sur $I \cap [a - \eta, a + \eta]$, où η est un réel strictement positif. En fait, **si une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue sur tout segment de I , alors elle est continue sur I** . On en déduit cette adaptation du théorème 1:

Théorème 1bis. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} , convergeant simplement vers une fonction f sur I , la convergence étant uniforme sur tout segment de I . Alors f est continue sur I .

On peut remplacer les segments par d'autres intervalles adaptés à la situation. Par exemple, si (f_n) est une suite de fonctions continues sur \mathbb{R}_+^* , convergeant simplement sur \mathbb{R}_+^* vers une fonction f , la convergence étant uniforme sur toute demi-droite de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, on peut affirmer que f est continue sur \mathbb{R}_+^* .

b. Le théorème d'intégration sur un segment.

On a vu en **I.1.a.** que la convergence simple ne permet pas d'intervertir limite et intégrale sur un segment, ici encore il en va autrement de la convergence uniforme.

Théorème 2. Si une suite (f_n) de fonctions continues sur un segment $S = [a, b]$ converge uniformément sur S vers une fonction f , alors f est continue sur S , et on a

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt .$$

C'est un théorème d'interversion limite-intégrale puisque la conclusion s'écrit

$$\int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt .$$

Preuve. La continuité de f résulte du théorème 1 ci-dessus. Ensuite, on a

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f_n(t) - f(t)) dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)| dt \leq (b - a) \|f_n - f\|_\infty$$

en utilisant successivement la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire intégrale et l'inégalité de la moyenne. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, le théorème d'encadrement permet

de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n = \int_S f$.

c. Le théorème de dérivation.

Commençons par noter qu'une limite, même uniforme, de fonctions dérivables, peut ne pas être dérivable. Reprenons l'exemple 4 de **I.1.b.** Les fonctions $f_n : x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ sont dérivables (et même de classe C^∞) sur \mathbb{R} , et la limite uniforme $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Il existe pourtant un théorème de **dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions**, mais l'hypothèse de convergence uniforme doit ici concerner la suite des dérivées.

Théorème 3. Si (f_n) est une suite de fonctions de classe C^1 sur I qui converge simplement sur I vers une fonction f , et si la suite (f'_n) converge uniformément sur I vers une fonction h , alors f est de classe C^1 sur I et $f' = h$.

C'est un théorème d'interversion limite-dérivée puisque la conclusion s'écrit

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n , \text{ ou encore } \frac{d}{dt} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(t) .$$

Preuve. Les fonctions f'_n sont continues sur I et la suite (f'_n) converge uniformément sur I , donc h est continue sur I d'après le théorème 1. Soient $a \in I$, $x \in I$, la convergence uniforme de (f'_n) vers h sur $[a, x]$ ou $[x, a]$ entraîne (théorème 2) l'égalité

$$\int_a^x h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^x f'_n(t) dt ,$$

soit $\int_a^x h(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a)$, en utilisant le théorème fondamental de l'analyse et l'hypothèse de convergence simple de (f_n) vers f sur I . On a donc, pour a et x dans I , la relation

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(t) dt,$$

qui, comme h est continue, montre que f est une primitive de h , i.e. que f est de classe \mathcal{C}^1 et $f' = h$.

Ce théorème est en fait le même que le théorème 2 d'intégration, mais "lu à l'envers".

Adaptation. En relisant le détail de la démonstration ci-dessus ainsi que le théorème 1bis, on s'aperçoit qu'il est suffisant de supposer que la convergence de (f'_n) vers h est uniforme sur tout segment de I (ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation). Voici finalement l'énoncé à retenir:

Théorème 3bis.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I . On suppose que:

- la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f ;
- la suite (f'_n) converge simplement sur I vers une fonction h , **la convergence étant uniforme sur tout segment de I .**

Alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f' = h$.

On va maintenant étendre cet énoncé à des fonctions de classe \mathcal{C}^k avec $k \in \mathbb{N}^*$ mais, pour pouvoir itérer l'application du théorème 3bis, on a besoin d'un petit raffinement:

Lemme. Avec les notations et les hypothèses du théorème 3bis, la convergence de (f_n) vers f est en fait uniforme sur tout segment de I .

Preuve. Soit $S = [a, b]$ un segment inclus dans I , soit $x \in S$. Alors les fonctions f_n et f étant de classe \mathcal{C}^1 , on a les égalités

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \quad \text{et} \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt.$$

Donc

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(a) - f(a) + \int_a^x f'_n(t) dt - \int_a^x f'(t) dt \right| \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f'_n(t) - f'(t)| dt \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + (x - a) \|f'_n - f'\|_{\infty, S} \\ &\leq |f_n(a) - f(a)| + (b - a) \|f'_n - f'\|_{\infty, S}. \end{aligned}$$

On dispose ainsi d'une majoration uniforme de $|f_n(x) - f(x)|$ par une expression indépendante de x et qui tend vers 0 (puisque (f_n) converge simplement vers f et que (f'_n) converge uniformément vers $f' = h$ sur S), on a donc prouvé la convergence uniforme de (f_n) vers f sur le segment S .

Théorème 3ter.

Soit (f_n) une suite de fonctions de classe C^k sur I avec $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que:

- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la suite $(f_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction h_j ;

- la convergence de la suite $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme sur tout segment de I .

Alors $h_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe C^k sur I et, pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, on a $h_j = h_0^{(j)}$.

Esquisse de preuve. La suite $(f_n^{(k-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème 3bis, on en déduit que h_{k-1} est de classe C^1 avec $h'_{k-1} = h_k$. Le lemme ci-dessus permet de plus d'affirmer que la convergence de la suite $(f_n^{(k-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ vers h_{k-1} est uniforme sur tout segment de I . Donc la suite $(f_n^{(k-2)})_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie aussi les hypothèses du théorème 3bis, donc h_{k-2} est de classe C^1 et a pour dérivée h_{k-1} . Finalement, h_{k-2} est de classe C^2 et $h''_{k-2} = h_k$.

On "redescend" de proche en proche jusqu'à obtenir que $h_0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est de classe C^k et a pour dérivée k -ème h_k .

II. Séries de fonctions

1. Les modes de convergence.

a. La convergence simple.

Définition. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I si, pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge.

Pour étudier une série de fonctions, il peut être pertinent d'introduire des fonctions sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ (si la sommation commence à l'indice 0, sinon on adapte). La convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ équivaut bien sûr à la convergence simple de la suite de fonctions (s_n) .

En cas de convergence, on pourra introduire une fonction somme s définie par

$$\forall x \in I \quad s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(x)$$

et des fonctions restes r_n définies par

$$\forall x \in I \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

Exemple. Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n$. Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I et a pour somme $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Il s'agit en effet d'une série géométrique dont la raison est strictement inférieure à 1 en valeur absolue. Dans cet

exemple très particulier, on sait expliciter les sommes partielles $s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ et les restes $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1 - x}$.

b. La convergence uniforme.

On définit cette notion pour une série de fonctions en se ramenant à la suite des sommes partielles.

Définition. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément** sur I si la suite (s_n) des fonctions sommes partielles converge uniformément sur I .

On dispose d'une caractérisation faisant intervenir les fonctions restes:

Caractérisation. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . La série de fonctions $\sum f_n$ **converge uniformément sur I si et seulement si:**

- cette série de fonctions converge simplement sur I ;
- la suite (r_n) des fonctions restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle, i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.

Preuve. En effet, la convergence uniforme entraîne la convergence simple. Et, en cas de convergence simple, il y a convergence uniforme si et seulement si la suite (s_n) converge uniformément vers s , i.e. si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|s_n - s\|_\infty = 0$, i.e. si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|r_n\|_\infty = 0$.

Exemple 1. Reprenons l'exemple de la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x) = x^n$ sur l'intervalle $I =]-1, 1[$. On a vu que cette série converge simplement et a pour somme $s(x) = \frac{1}{1 - x}$. Il n'y a pas convergence uniforme sur I puisque $r_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1 - x}$ tend vers l'infini lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures, donc $\|r_n\|_{\infty, I} = +\infty$ (cette fonction n'est pas bornée sur I). En revanche, cette série de fonctions **converge uniformément sur tout segment** de I puisque, si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans I ($-1 < a < b < 1$), on a $S \subset [-r, r]$ avec $r = \max\{|a|, |b|\} \in]0, 1[$, on dispose alors sur S de la **majoration uniforme**

$$\forall x \in S \quad |r_n(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{1 - r}$$

et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{r^{n+1}}{1 - r} = 0$, on en déduit que la suite (r_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur S .

Exemple 2. Soit $I = [0, 1]$. Pour $x \in I$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$. Alors la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur I . En effet, pour $x \in I$ fixé, la suite $\left(\frac{x^n}{n}\right)_{n \geq 1}$ est décroissante de limite nulle. Le théorème spécial des séries alternées montre alors que la série numérique $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge, on a donc prouvé la convergence simple sur I . Mais le même théorème spécial permet aussi de majorer le reste en valeur absolue:

$$\forall x \in I \quad |r_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ceci n'est pas encore une majoration uniforme, continuons donc à majorer:

$$\forall x \in I \quad |r_n(x)| \leq \frac{1}{n+1},$$

donc $\|r_n\|_\infty \leq \frac{1}{n+1}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|r_n\|_\infty = 0$, la convergence uniforme sur I est prouvée.

c. La convergence normale.

Définition. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ **converge normalement** sur I si:

- chaque fonction f_n est bornée sur I , i.e. $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f_n\|_\infty < +\infty$;
- la série numérique de terme général $\|f_n\|_\infty$ converge, i.e. la suite $(\|f_n\|_\infty)$ est sommable.

Ce mode de convergence des séries de fonctions est intéressant car il implique la convergence uniforme et qu'il est, en général, plus facile à vérifier que cette dernière.

Proposition. La convergence normale d'une série de fonctions entraîne sa convergence uniforme.

Preuve. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant normalement sur I . Alors:

- si l'on fixe $x \in I$, on a pour tout n entier, $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$; par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence absolue de la série $\sum f_n(x)$, on a donc déjà prouvé la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$;
- pour $x \in I$ et n entier, on a

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty.$$

On a ainsi une majoration uniforme de $|r_n(x)|$ par une expression qui tend vers 0 puisque c'est le reste d'ordre n d'une série convergente. Donc $\|r_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la suite (r_n) des fonctions restes converge uniformément vers la fonction nulle sur I . Ceci caractérise la convergence uniforme de la série $\sum f_n$ d'après le paragraphe précédent.

On a donc le schéma suivant concernant les modes de convergence des séries de fonctions, en utilisant des abréviations standard:

$$\boxed{\text{CVN} \implies \text{CVU} \implies \text{CVS}},$$

aucune de ces implications n'étant une équivalence. En effet, l'exemple 1 du paragraphe précédent montre une série de fonctions convergeant simplement sur $I =]-1, 1[$, mais ne convergeant pas uniformément sur cet intervalle. Et l'exemple 2 du paragraphe précédent montre une série de fonctions convergeant uniformément sur $I = [0, 1]$, mais ne convergeant pas normalement sur cet intervalle puisque, avec $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$ sur $[0, 1]$, on a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ et la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Remarque. En relisant le début de la preuve ci-dessus, on voit aussi que **la convergence normale d'une série de fonctions entraîne sa convergence absolue en tout point.**

Pratique. Pour montrer qu'une série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur un intervalle I , il n'est pas toujours facile de calculer exactement $\|f_n\|_\infty$. Mais il suffit de trouver ce qu'on appelle une **série majorante**, c'est-à-dire une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ "majorante", i.e. telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad |f_n(x)| \leq \alpha_n .$$

Autrement dit, on recherche une **majoration uniforme** de $|f_n(x)|$ par une suite (α_n) **sommable**.

En effet, si une telle série majorante existe alors, la majoration de $|f_n(x)|$ étant uniforme, on a $\|f_n\|_\infty \leq \alpha_n$ pour tout n et, comme $\sum \alpha_n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série $\sum \|f_n\|_\infty$, ce qu'il fallait prouver.

Exemple très simple. Sur \mathbb{R} , la série de fonctions $\sum f_n$ avec $f_n(x) = \frac{\sin(2nx^2) \cos(n^2x)}{2^n}$, converge normalement puisque $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$, la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ étant sommable. Je suppose que personne n'a envie de faire une étude des variations de cette fonction tordue pour déterminer la valeur exacte de $\|f_n\|_\infty$.

Enfin, comme dans le cadre de la convergence uniforme des suites (ou séries) de fonctions, on rencontrera de nombreuses situations de **convergence normale sur tout segment**.

Exemple de la série exponentielle. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$. On sait que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et a pour somme la fonction exponentielle $s : x \mapsto e^x$. La convergence n'est pas normale sur \mathbb{R} puisque, pour $n \geq 1$, la fonction polynomiale f_n n'est pas bornée sur \mathbb{R} ($\|f_n\|_\infty = +\infty$). Mais il y a **convergence normale sur tout segment** de \mathbb{R} . En effet, si $S = [a, b]$ est un segment, on a $S \subset [-r, r]$ en posant $r = \max\{|a|, |b|\}$, et $\forall x \in S \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f_n(x)| \leq \frac{r^n}{n!}$, la suite $\left(\frac{r^n}{n!}\right)$ étant bien sommable puisque l'on reconnaît le terme général d'une série exponentielle.

2. Les théorèmes (régularité de la somme d'une série de fonctions).

Dans ce paragraphe, à l'exception du théorème 4, il s'agit simplement d'adapter au cadre des séries de fonctions les théorèmes vus récemment pour les suites de fonctions. Les démonstrations ne seront pas détaillées (sauf la première) puisque, pour chaque théorème, il suffit d'appliquer le théorème analogue sur les suites de fonctions à la suite des fonctions sommes partielles de la série que l'on étudie. Je donnerai directement aussi l'adaptation au cas où la convergence est seulement uniforme sur tout segment de l'intervalle d'étude.

Enfin, dans la mise en pratique, la convergence uniforme nécessaire à l'application de ces théorèmes sera, dans la grande majorité des cas, obtenue comme une conséquence de la convergence normale.

a. Le théorème de continuité.

Théorème 1. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} . On suppose que chaque fonction f_n est continue sur I et que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I , la convergence étant uniforme sur tout segment de I , et on note s la fonction somme. Alors la fonction s est continue sur I .

Preuve. Les fonctions f_n étant continues sur I , il en est de même des fonctions sommes partielles $s_n = \sum_{k=0}^n f_k$ puisque ce sont des sommes finies de fonctions continues. La suite de fonctions (s_n) converge uniformément sur tout segment de I vers la fonction $s = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$, donc s est continue d'après le théorème 1bis du paragraphe sur les suites de fonctions.

Exercice II.2.1. La fonction zéta de Riemann est définie par

$$\forall x \in]1, +\infty[\quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Montrer que la fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$. \square

b. Le théorème d'intégration terme à terme sur un segment.

Théorème 2. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment $S = [a, b]$. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur S , alors la série des intégrales est convergente, et on a

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

C'est donc un théorème d'**interversion série-intégrale**. Un autre théorème d'interversion série-intégrale (ou d'intégration terme à terme) sera étudié ultérieurement, avec des hypothèses différentes.

Exercice II.2.2. Soit $x \in]-1, 1[$. En utilisant l'identité $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$, montrer l'égalité

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \quad (x \in]-1, 1[).$$

Montrer que cette égalité reste vraie pour $x = 1$. Pour cette dernière question, on pourra utiliser l'exemple 2 du paragraphe II.1.b. \square

c. Le théorème de dérivation terme à terme.

Théorème 3. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I . On suppose que:

- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I , on note s sa somme ;
- la série de fonctions $\sum f'_n$ converge simplement sur I , la convergence étant uniforme sur tout segment de I .

Alors la fonction $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et on a $s' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$.

C'est donc un théorème d'**interversion série-dérivée** puisque sa conclusion peut s'écrire sous la forme

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Voici une extension de ce théorème aux fonctions de classe \mathcal{C}^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 3bis. Soit (f_n) une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle I , avec $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que:

- pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(j)}$ converge simplement sur I , on note s_j sa somme ;

- la convergence de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}$ est uniforme sur tout segment de I .

Alors la fonction $s_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe \mathcal{C}^k sur I et on a $s_0^{(j)} = s_j = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$ pour tout $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$.

Exercice II.2.3. En utilisant l'identité $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ pour $x \in]-1, 1[$. \square

Exercice II.2.4. Montrer que la fonction $\zeta : x \mapsto \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur son ensemble de définition $]1, +\infty[$, exprimer $\zeta^{(p)}(x)$ comme somme d'une série, déterminer le signe de $\zeta^{(p)}(x)$ pour p entier naturel et $x \in]1, +\infty[$. \square

d. Le théorème de la double limite (admis).

Théorème 4. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers \mathbb{K} , soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ une extrémité de l'intervalle I . Si la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur I et a pour somme s et si, pour tout n , la fonction f_n admet une limite l_n au point a , alors la série $\sum_{n \geq 0} l_n$ converge et on a l'égalité $\lim_{x \rightarrow a} s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$.

C'est un théorème d'**interversion somme-limite** puisque la conclusion s'écrit sous la forme

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow a} f_n(x).$$

Exercice II.2.5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x) = 1$. \square

e. Commentaire général sur ces théorèmes.

On sait que des opérations mathématiques comme l'intégration, la dérivation, le calcul d'une limite, sont **linéaires**. Cela signifie que, tant que l'on travaille sur des **sommes finies**, il n'y a aucun problème pour intervertir somme et intégrale, ou bien somme et dérivée, ou bien pour affirmer que la limite de la somme est la somme des limites (si ces limites existent,

bien sûr), il suffit de mentionner l'argument de linéarité. En revanche, lorsque l'on travaille sur une **somme infinie** (somme d'une série de fonctions), il y a un passage à la limite sous-jacent et, pour intervertir ces opérations mathématiques, un argument de convergence uniforme (ou normale) devient nécessaire.