CORRIGÉ du DM de MATH FACULTATIF "TOUSSAINT"
PSI2 2023-2024

PARTIE A.

1.a. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction **à valeurs réelles** (*rappelons que le résultat n'est pas vrai pour des fonctions à valeurs complexes ou vectorielles*), supposée continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$. Alors il existe au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

b. Par applications répétées du théorème de Rolle : soient $n+1$ points distincts $a_0^{(0)}$, $a_1^{(0)}$, $\cdots$, $a_n^{(0)}$ en lesquels g s'annule, rangés dans l'ordre croissant ($a_0^{(0)} < a_1^{(0)} < \cdots < a_n^{(0)}$). Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un point $a_k^{(1)} \in]a_k^{(0)}, a_{k+1}^{(0)}[$ en lequel la dérivée première g' s'annule : on a ainsi obtenu n zéros distincts pour g' sur $]-1,1[$. Par une récurrence finie sur $p \in [\![1, n]\!]$, on montre que la dérivée p-ième $g^{(p)}$ s'annule en au moins $n-p+1$ points distincts $a_0^{(p)}$, $\cdots$, $a_{n-p}^{(p)}$ dans $]-1,1[$ (*la démonstration de l'hérédité consiste à intercaler un zéro de $g^{(p+1)}$ entre deux consécutifs des zéros de $g^{(p)}$ précédemment énumérés*) ; ainsi, on obtient au moins un zéro $c := a_0^{(n)}$ pour la dérivée n-ième $g^{(n)}$ sur $]-1,1[$.

2.a. Si un tel polynôme L_i existe, alors il admet pour racines les $n-1$ nombres a_j, avec $j \in [\![0, n-1]\!] \setminus \{i\}$, on peut donc factoriser ce polynôme par le produit des $X - a_j$, avec $j \neq i$. Ainsi, $L_i = \left(\prod_{j \neq i} (X - a_j) \right) \cdot Q$, où Q est un polynôme. Mais on veut que L_i soit de degré au plus $n-1$, cela impose que le polynôme Q soit constant, notons alors $Q = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition $L_i(a_i) = 1$ entraîne $\lambda = \prod_{j \neq i} \left(\frac{1}{a_i - a_j} \right)$. On a donc nécessairement $L_i = \prod_{j \neq i} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right)$. Réciproquement, ce polynôme convient.

Notons que les polynômes L_i sont tous de degré $n-1$ exactement, et que l'on a $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$ (symbole de Kronecker) pour tout $(i,j) \in [\![0, n-1]\!]^2$.

b. Le cardinal de la famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_{n-1})$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, soit n. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre. Or, si des réels λ_0, $\cdots$, λ_{n-1} sont tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i L_i = 0$, en évaluant cette identité polynomiale pour $X = a_j$ ($j \in [\![0, n-1]\!]$ fixé), on obtient $\lambda_j = 0$. Donc la famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

c. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, soit $P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i L_i$ sa décomposition dans la base $\mathcal{L}$. Pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$, on a $P(a_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \, L_i(a_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$. Finalement, $P = \sum_{i=0}^{n-1} P(a_i) \, L_i$, les coordonnées de P dans la base $\mathcal{L}$ sont les $P(a_i)$, $0 \leq i \leq n-1$.

d. En cherchant P_f sous la forme $P_f = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i L_i$, on obtient $\lambda_j = P_f(a_j) = f(a_j)$ pour tout j en raisonnant comme ci-dessus. Le polynôme P_f recherché est donc unique, et sa décomposition dans la base de Lagrange est $P_f = \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \, L_i$.

3. Dans ce cas, on a évidemment $P_f = f$ (en identifiant polynôme et fonction polynomiale associée), d'où $J_n(f) = I(f)$.

4.a. Puisque $A_n(x) \neq 0$, la seule solution est $\lambda_x = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{A_n(x)}$.

b. On a $g_x(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ puisque $P_f(a_i) = f(a_i)$ et $A_n(a_i) = 0$. Mais on a aussi $g_x(x) = 0$ par le choix de la constante λ_x. La fonction g_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle s'annule en $n+1$ points distincts de l'intervalle $[-1, 1]$ (le point x et les n points a_i), donc (**1.b.**) il existe $c_x \in]-1, 1[$ tel que $g_x^{(n)}(c_x) = 0$.

c. Comme P_f est un polynôme de degré strictement inférieur à n, on a $P_f^{(n)} = 0$. Comme A_n est un polynôme unitaire de degré n, on a $A_n^{(n)} = n!$ (polynôme constant). La relation $g_x^{(n)}(c_x) = 0$ s'écrit alors $f^{(n)}(c_x) - n!\,\lambda_x = 0$, d'où $\lambda_x = \dfrac{f^{(n)}(c_x)}{n!}$.

5. De **4.c.**, on déduit immédiatement $|\lambda_x| \leq \dfrac{M_n(f)}{n!}$, d'où la majoration de l'erreur "ponctuelle" commise en remplaçant la fonction f par le polynôme P_f sur $[-1, 1]$:

$$\forall x \in [-1, 1] \qquad |f(x) - P_f(x)| \leq \frac{M_n(f)}{n!}\,|A_n(x)|\,.$$

(cette dernière relation étant trivialement vraie si x est l'un des a_i).

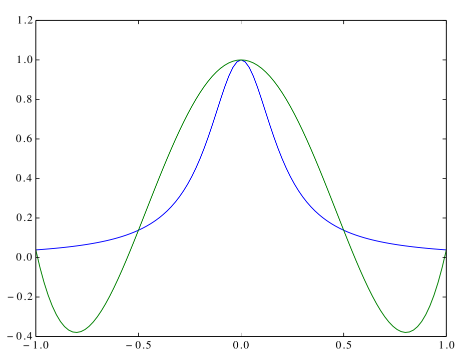
Ensuite, $|I(f) - J_n(f)| = \left| \displaystyle\int_{[-1,1]} (f - P_f) \right| \leq \displaystyle\int_{[-1,1]} |f - P_f| \leq \dfrac{M_n(f)}{n!} \displaystyle\int_{[-1,1]} |A_n|$.

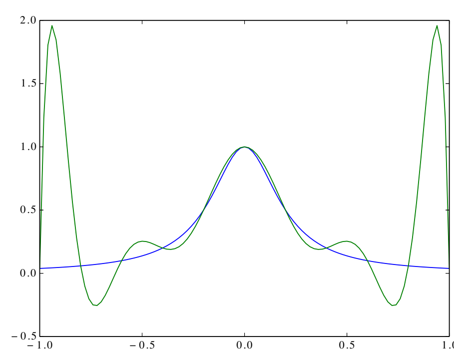
PARTIE B.

6.a. *cf.* script, on calcule $L_i(x) = \displaystyle\prod_{j \neq i} \left(\frac{x - a_j}{a_i - a_j} \right)$.

b. *cf.* script, on calcule $P_f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)\,L_i(x)$, où `l`=$[a_0, \cdots, a_{n-1}]$ liste passée en argument.

c. *cf.* script. On observe qu'en augmentant le nombre de points d'interpolation a_i, on obtient une fonction polynomiale P_f qui semble être une meilleure approximation de la fonction f dans le milieu de l'intervalle $[-1, 1]$, mais qui "diverge complètement" sur les bords de l'intervalle, c'est le **phénomène de Runge**. Pour ceux que cela intéresse, Wikipedia vous en parlera mieux que moi!





7.a. Le pas de la subdivision est $\dfrac{2}{n-1}$, donc $a_k = -1+\dfrac{2k}{n-1} = \dfrac{2k-n+1}{n-1}$ $\qquad (0 \leq k \leq n-1)$.

b. Si $x \in [a_k, a_{k+1}]$, on a

$$|A_n(x)| = \left| \prod_{i=0}^{n-1} (x-a_i) \right| = \left(\prod_{i=0}^{k} (x-a_i) \right) \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} (a_i - x) \right).$$

Pour tout $i \in [\![0,k]\!]$, on a $0 \leq x - a_i \leq a_{k+1} - a_i = (k+1-i)\, \dfrac{2}{n-1}$.

Pour tout $i \in [\![k+1,n-1]\!]$, on a $0 \leq a_i - x \leq a_i - a_k = (i-k)\, \dfrac{2}{n-1}$.

On déduit la majoration

$$|A_n(x)| \leq \left(\frac{2}{n-1}\right)^n \left(\prod_{i=0}^{k} (k+1-i) \right) \left(\prod_{i=k+1}^{n-1} (i-k) \right) = \left(\frac{2}{n-1}\right)^n (k+1)!\,(n-1-k)!\,.$$

c. Il s'agit de prouver que $(k+1)!\,(n-1-k)! \leq (n-1)!$ pour tout $k \in [\![0,n-2]\!]$. C'est clair pour $k=0$. Pour $k \geq 1$, on peut par exemple écrire

$$\frac{(k+1)!\,(n-1-k)!}{(n-1)!} = \frac{(k+1)!}{(n-k)\times \cdots \times (n-1)} = \frac{2 \times \cdots \times (k+1)}{(n-k)\times \cdots \times (n-1)}$$

et ainsi il apparaît que numérateur et dénominateur sont tous deux produits de k facteurs, mais les facteurs du numérateur sont inférieurs aux facteurs du dénominateur donc $\dfrac{(k+1)!\,(n-1-k)!}{(n-1)!} \leq 1$, ce qu'il fallait prouver. *Remarquons que l'on a aussi obtenu ainsi une minoration des coefficients binomiaux : pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a $\dbinom{n}{k} \geq n$.*

d. La majoration obtenue en **c.** est uniforme (*indépendante de x*), il suffit de montrer que $\left(\dfrac{2}{n-1}\right)^n (n-1)! \left(\dfrac{e}{2}\right)^n \leq 1$ pour n assez grand. Posons donc $u_n = \left(\dfrac{2}{n-1}\right)^n (n-1)! \left(\dfrac{e}{2}\right)^n$.

On a $u_n = \dfrac{e^n}{(n-1)^n}\,(n-1)!$ et l'utilisation de la formule de Stirling donne

$$u_n \sim \frac{e^n}{(n-1)^n}\,\frac{(n-1)^{n-1}}{e^{n-1}}\,\sqrt{2\pi\,(n-1)} = e\sqrt{\frac{2\pi}{n-1}} \sim e\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\,.$$

Ainsi, il apparaît que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc $0 \leq u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang, ce qui répond à la question.

De $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{e}\right)^n = 0$, on déduit que la suite de fonctions polynomiales (A_n) converge uniformément sur $[-1,1]$ vers la fonction nulle.

e. Posons $x_n = 1 - \dfrac{1}{n-1}$, alors $x_n \in [a_{n-2}, a_{n-1}]$, donc

$$A_n(x_n) = \left(\prod_{k=0}^{n-2} (x_n - a_k) \right) (a_{n-1} - x_n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2n-3}{n-1}\times\frac{2n-5}{n-1}\times\cdots\frac{1}{n-1}\right)\times\left(-\frac{1}{n-1}\right)\\
&= -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\,(n-1)^{n-1}}\ .
\end{aligned}
$$

L'équivalent de Stirling donne, après simplifications, $\big|A_n(x_n)\big| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e}{n\,\sqrt{2}}\left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.

8.a. Pour $n\in\mathbb{N}^*$et $x\in[-1,1]$, en posant $\theta=\mathrm{Arccos}(x)$ pour simplifier, on a

$$
\begin{aligned}
T_{n-1}(x)+T_{n+1}(x) &= \cos\big((n-1)\theta\big)+\cos\big((n+1)\theta\big)\\
&= \cos(n\theta)\ \cos(\theta)+\sin(n\theta)\ \sin(\theta)+\cos(n\theta)\ \cos(\theta)-\sin(n\theta)\ \sin(\theta)\\
&= 2\ \cos(n\theta)\ \cos(\theta)\\
&= 2\,x\,T_n(x)\ ,
\end{aligned}
$$

ce qui est bien la relation demandée, en décalant les indices.

b. Trivialement, $T_0(x)=1$ et $T_1(x)=x$, puis par la relation obtenue en **a.**, $T_2(x)=2x^2-1$, puis $T_3(x)=4x^3-3x$.

c. Les fonctions T_0 et T_1 sont polynomiales et, si pour un entier $n\in\mathbb{N}$ donné, T_n et T_{n+1} le sont, alors T_{n+2} est encore une fonction polynomiale d'après **a.** (récurrence double). De la même façon, $\deg(T_0)=0$, $\deg(T_1)=1$ et, si pour $n\in\mathbb{N}$ donné, on suppose $\deg(T_n)=n$ et $\deg(T_{n+1})=n+1$, alors la relation du **a.** donne $\deg(T_{n+2})=n+2$. On conclut donc que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction T_n est polynomiale de degré n.

Enfin, le coefficient dominant de T_{n+2} est le double de celui de T_{n+1} d'après **a.** Celui de T_1 étant 1, on déduit que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il y a une exception pour $n=0$. Le "terme dominant" du polynôme T_n est donc $2^{n-1}X^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

d. Pour $x\in[-1,1]$, on a $\big|T_n(x)\big|=\Big|\cos\big(n\ \mathrm{Arccos}(x)\big)\Big|\le 1$, donc $\|T_n\|_\infty\le 1$. Par ailleurs, $T_n(1)=\cos(0)=1$, donc $\|T_n\|_\infty\ge 1$. Finalement, $\|T_n\|_\infty=1$.

e. Pour $x\in[-1,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$
\begin{aligned}
T_n(x)=0 \quad&\Longleftrightarrow\quad \cos\big(n\ \mathrm{Arccos}(x)\big)=0 \iff n\ \mathrm{Arccos}(x)=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbf{Z})\\
&\Longleftrightarrow\quad \mathrm{Arccos}(x)=\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n} \qquad (0\le k\le n-1)\\
&\Longleftrightarrow\quad x=\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (0\le k\le n-1)\ ,
\end{aligned}
$$

on restreint à $k\in[\![0,n-1]\!]$ car la fonction arc cosinus doit prendre ses valeurs dans $[0,\pi]$. La fonction cosinus étant strictement décroissante, donc injective, sur $[0,\pi]$, on a obtenu ainsi n racines distinctes du polynôme T_n. Ce dernier étant de degré n, on a obtenu toutes ses racines, il ne reste plus qu'à les indexer dans l'ordre croissant. On pose pour cela

$$
a_k=\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{(n-1-k)\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{2n-2k-1}{2n}\ \pi\right) \qquad , \quad 0\le k\le n-1\ ,
$$

et on a ainsi une indexation des racines de T_n dans l'ordre strictement croissant.

f. On connaît les racines et le coefficient dominant du polynôme T_n, on peut donc le factoriser: pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_n = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - a_k) = 2^{n-1}\, A_n \ .$$

Donc $\|A_n\|_\infty = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Notons B_n les polynômes A_n correspondant à la subdivision régulière. La question **7.e.** montre que $\|B_n\|_\infty \geq \dfrac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\,(n-1)^{n-1}}$. On a donc $\dfrac{\|A_n\|_\infty}{\|B_n\|_\infty} \leq u_n$, en posant $u_n = \dfrac{(n-1)!\,(n-1)^{n-1}}{(2n-2)!}$. Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{e}{4}\right)^n$, on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\|A_n\|_\infty}{\|B_n\|_\infty} = 0$. La question **5.** permet alors d'espérer que l'interpolation par les polynômes de Lagrange calculés en les points de Tchebychev sera meilleure qu'avec les points régulièrement répartis, il ne reste plus qu'à le vérifier expérimentalement sur un exemple.

g. *cf.* script. Effectivement, le phénomène de Runge ne se produit plus, il semblerait bien (mais le démontrer conduirait à des calculs très compliqués) que la suite des polynômes d'interpolation P_f obtenus en faisant varier le nombre n de points d'interpolation converge uniformément sur le segment $[-1, 1]$ vers la fonction f.

9.a. Pour $x \in [-1, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
\big|T_n(x)\big| = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big|\cos\big(n\ \mathrm{Arccos}(x)\big)\Big| = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad n\ \mathrm{Arccos}(x) = k\pi \qquad (k \in \mathbf{Z}) \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Arccos}(x) = \frac{k\pi}{n} \qquad (0 \leq k \leq n) \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (0 \leq k \leq n)
\end{aligned}$$

On limite k à l'intervalle entier $[\![0, n]\!]$ car la fonction arc cosinus prend ses valeurs dans $[0, \pi]$. La fonction cosinus étant strictement décroissante, donc injective, dans ce même intervalle $[0, \pi]$, on a bien obtenu ainsi $n + 1$ points distincts, indexés pour le moment de façon décroissante. Il suffit de poser $c_k = \cos\left(\dfrac{(n-k)\pi}{n}\right)$, avec $k \in [\![0, n]\!]$, pour les ranger dans l'ordre croissant. On peut remarquer que $c_0 = -1$ et $c_n = 1$.

b. On a $T_n(c_k) = \cos\big(n\ \mathrm{Arccos}(c_k)\big) = \cos\big((n-k)\pi\big) = (-1)^{n-k}$, donc

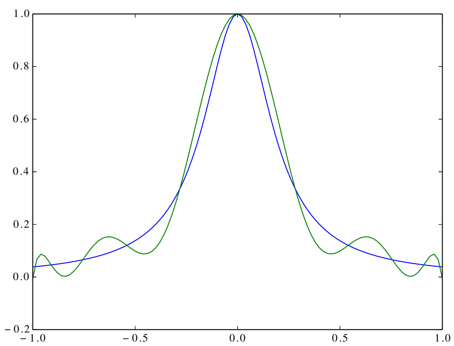
$$A_n(c_k) = \frac{1}{2^{n-1}}\, T_n(c_k) = \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-1}} \ .$$

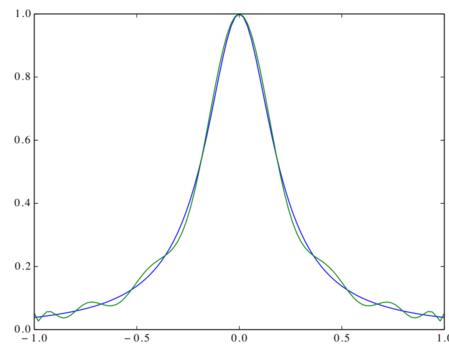
c. Les polynômes P et A_n sont tous deux unitaires de degré n, on en déduit que le polynôme $Q = A_n - P$ est de degré au plus $n - 1$ (les termes de degré n s'annihilent).

On a $\big|P(c_k)\| \leq \|P\|_\infty < \dfrac{1}{2^{n-1}} = \big|A_n(c_k)\big|$, donc $Q(c_k) = A_n(c_k) - P(c_k)$ est du même signe que $A_n(c_k)$, c'est-à-dire du signe de $(-1)^{n-k}$.

d. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction polynomiale associée au polynôme $Q = A_n - P$ (et qui est donc continue) prend des valeurs de signes opposés en les points c_k et c_{k+1}. Par le théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que le polynôme Q admet au moins une racine dans l'intervalle $]c_k, c_{k+1}[$. Le polynôme Q est de degré au plus $n-1$ et admet donc au moins n racines, donc Q est le polynôme nul. Mais ceci entraîne que $P = A_n$, ce qui est impossible puisque $\|P\|_\infty < \|A_n\|_\infty$ par hypothèse.

On a donc prouvé que tout polynôme unitaire de degré n vérifie $\|P\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^{n-1}} = \|A_n\|_\infty$. Si l'on prend n points distincts $b_0, \cdots, b_{n-1}$ dans l'intervalle $[-1,1]$, le polynôme $B = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-b_k)$ vérifie donc $\|B\|_\infty \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$, la question **5.** montre alors que l'approximation d'une fonction f par le polynôme d'interpolation P_f sur $[-1,1]$ ne pourra pas être meilleure que celle obtenue avec les points de Tchebychev $a_0, \cdots, a_n$ introduits dans la question **8.**





PARTIE C.

10.a. La linéarité de T est immédiate. Les espaces de départ et d'arrivée ont la même dimension, il suffit donc de prouver l'injectivité de T. Or, un polynôme P de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ vérifiant $T(P) = 0$ admet chacun des nombres a_i comme racine au moins double, donc est divisible par le polynôme $A_n^2 = \displaystyle\prod_{i=0}^{n-1}(X-a_i)^2$; en considérant les degrés, on voit que P ne peut être que le polynôme nul. Donc T est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^{2n}$.

b. Un tel polynôme Q existe et est unique puisque $Q = T^{-1}(0,\cdots,0;1,0,\cdots,0)$. Ce polynôme Q admet a_0 comme racine simple et chacun des a_i $(1 \leq i \leq n-1)$ comme racine au moins double, donc il est divisible par le polynôme $R = (X-a_0)\cdot\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)^2$. Enfin, $Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$, donc $\deg Q \leq 2n-1 = \deg R$ et $Q = \lambda R$ où λ est une constante non nulle. Posons enfin $S = \displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(X-a_i)^2$, on a $Q = \lambda\,(X-a_0)\,S$ d'où $Q' = \lambda S + \lambda\,(X-a_0)\,S'$ et $1 = Q'(a_0) = \lambda\,S(a_0)$, ce qui détermine λ. On obtient finalement

$$Q = (X-a_0)\cdot\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{X-a_i}{a_0-a_i}\right)^2 .$$

c. C'est $Q_f = T^{-1}\big(f(a_0), \cdots, f(a_{n-1}), f'(a_0), \cdots, f'(a_{n-1})\big)$.

11. Si $f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ (en confondant polynôme et fonction polynomiale associée), on a évidemment $Q_f = f$, donc $K_n(f) = I(f)$, c'est bête comme chou!

12.a. Fixons d'abord un réel x dans $[-1, 1]$, qui n'est aucun des a_i ; il existe alors un (unique) réel μ_x tel que $f(x) - Q_f(x) - \mu_x\, A_n(x)^2 = 0$, il y a juste à poser $\mu_x = \dfrac{f(x) - Q_f(x)}{A_n(x)^2}$. Définissons alors la fonction h_x comme dans l'énoncé ; cette fonction h_x est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1, 1]$, s'annule en $n + 1$ points distincts (x et les n points a_i) et sa dérivée h'_x s'annule en les n points a_i. Du théorème de Rolle, on déduit que la dérivée h'_x s'annule aussi en n points autres que les a_i ; la dérivée h'_x admet donc au moins $2n$ zéros distincts dans l'intervalle $[-1, 1]$. De la question **1.b.**, on déduit alors que la fonction $(h'_x)^{(2n-1)} = h_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point d_x de l'intervalle $[-1, 1]$: $h_x^{(2n)}(d_x) = 0$. Mais on vérifie que, pour tout $t \in [-1, 1]$, on a $h_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - (2n)!\, \mu_x$, d'où la relation $\mu_x = \dfrac{f^{(2n)}(d_x)}{(2n)!}$, d'où l'on déduit immédiatement la majoration $|\mu_x| \leq \dfrac{M_{2n}(f)}{(2n)!}$, soit $|f(x) - Q_f(x)| \leq \dfrac{M_{2n}(f)}{(2n)!} A_n(x)^2$ pour tout $x \in [-1, 1]$ (d'abord si x est distinct des a_i, mais c'est trivial si x est l'un des a_i).

b. $|I(f) - K_n(f)| = \left| \displaystyle\int_{[-1,1]} (f - Q_f) \right| \leq \displaystyle\int_{[-1,1]} |f - Q_f| \leq \dfrac{M_{2n}(f)}{(2n)!} \displaystyle\int_{[-1,1]} A_n^2$.

c. Si $f = A_n^2$, alors $Q_f = 0$ donc $K_n(f) = 0$; par ailleurs $f^{(2n)} = (2n)!$ (fonction constante), donc $M_{2n}(f) = (2n)!$ et on a alors égalité dans **12.b.**