

Déterminants

cf. programme précédent

Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions: *cf.* programme précédent.

Modes de convergence pour les séries de fonctions: convergence simple, convergence uniforme, convergence normale. La convergence normale entraîne la convergence uniforme.

Théorèmes sur la régularité de la somme d'une série de fonctions: continuité, intégration terme à terme sur un segment, dérivation terme à terme et extension aux fonctions de classe C^k .
Il s'agit d'une simple adaptation aux séries de fonctions des théorèmes vus la semaine précédente concernant les suites de fonctions.

Théorème de la double limite (interverson somme-limite) (*admis*).

Réduction des endomorphismes (début)

Notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée. Un vecteur non nul est vecteur propre de u si et seulement s'il engendre une droite vectorielle stable par u . Si $u \in \mathcal{L}(E)$, un scalaire λ est valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda \text{id}_E$ est non injectif.

En dimension finie, notion de spectre. Si E est **de dimension finie**, alors

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff u - \lambda \text{id}_E \notin \text{GL}(E) \iff \det(u - \lambda \text{id}_E) = 0.$$

Aucune connaissance spécifique sur le polynôme caractéristique pour le moment.

Si u et v commutent, les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences: en dimension finie n ,
 $\text{Card}(\text{Sp}(u)) \leq n$ et $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq n$. Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Calcul du déterminant de Vandermonde.
- Base de Lagrange associée à $n + 1$ scalaires distincts, expression d'un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
- Montrer que, si une suite (f_n) de fonctions continues sur un segment $S = [a, b]$ converge uniformément vers f sur S , alors $\int_S f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S f_n$.
- Théorème de dérivation de la limite d'une suite de fonctions.
- La convergence normale d'une série de fonctions entraîne la convergence uniforme.
- Exemple où il y a CVU, mais pas CVN.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences.