Suites de fonctions. Études d'exemples.

1. On considère la suite de fonctions (f_n) définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^2\, x\,(1-x)^n$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, étudier les variations de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$.

b. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la suite (f_n) sur $[0,1]$.

c. A-t-on $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

d. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,1[$, il y a convergence uniforme de la suite (f_n) sur le segment $[\alpha, 1]$.

- -

a. On calcule $f_n'(x) = n^2(1-x)^{n-1}\big(1-(n+1)x\big)$, on en déduit que f_n est croissante sur $[0,\alpha_n]$, puis décroissante sur $[\alpha_n, 1]$ avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n+1}$, et d'autre part $f_n(0) = f_n(1) = 0$. *Dresser un tableau de variations*!

b. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, c'est évident pour $x=0$ et $x=1$, et pour $x \in]0,1[$, on le voit en tranformant l'expression avec exponentielles et logarithmes. Il y a donc convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$

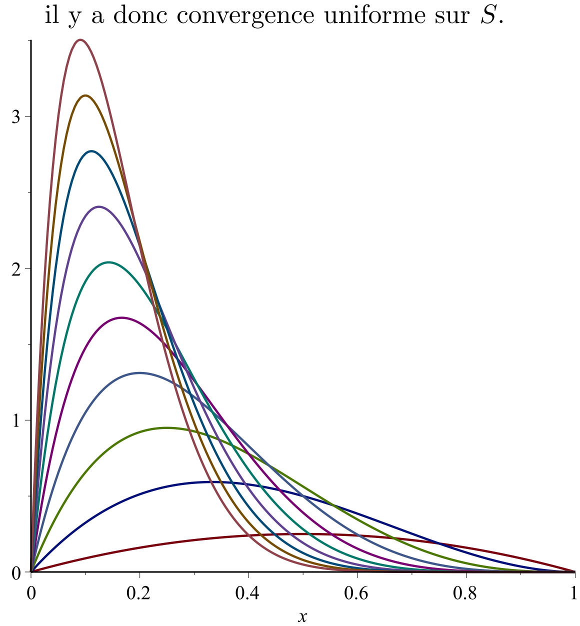
Mais $\displaystyle\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\Big(\frac{1}{n+1}\Big) = \frac{n^2}{n+1}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0,1]$. . On observe sur le schéma une "bosse grimpante".

c. En posant par exemple le changement de variable $t = 1-x$, on obtient que $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, alors que $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x = 0$.

d. Fixons $\alpha \in]0,1[$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0$, on aura $\dfrac{1}{n+1} \leq \alpha$ à partir d'un certain rang N. Pour $n \geq N$, la fonction f_n est alors positive et décroissante sur le segment $S = [\alpha, 1]$, donc

$$\forall n \geq N \qquad \|f_n\|_{\infty,S} = \sup_{x\in S}|f_n(x)| = f_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ ;$$

il y a donc convergence uniforme sur S.



2. Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f_n(x) = \frac{x}{n\,(1+x^n)} \ .$$

- -

De l'encadrement $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{x}{n}$, on déduit la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

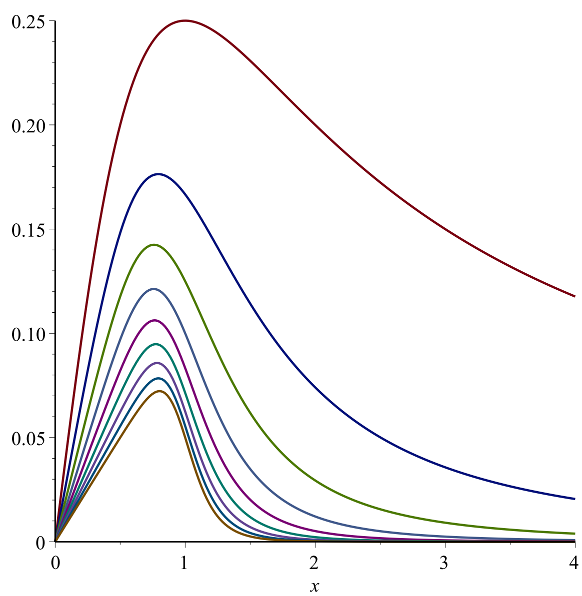
Ensuite, on fait l'étude de la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$; elle est dérivable avec

$$f_n'(x) = \frac{1}{n}\,\frac{(1+x^n) - x\,n\,x^{n-1}}{(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n\,(1+x^n)^2} \ .$$

Pour $n \geq 2$, posons $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$. On a alors $f_n'(x) > 0 \iff 0 \leq x < x_n$. De plus, f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$, donc

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \big|f_n(x)\big| = f_n(x_n) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}}}{n\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} = \frac{n-1}{n^2}\,\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \ .$$

Or, $\dfrac{1}{\sqrt[n]{n-1}} = e^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, donc $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$ et, en conséquence, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, la suite de fonctions (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.



3.a. Montrer l'inégalité $\forall u \in \mathbb{R} \quad 0 \leq 1 - \cos u \leq |u|$.

b. On pose $f_n(x) = \cos(x\, e^{-nx^2})$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme, de la suite de fonctions (f_n) sur $\mathbb{R}$.

- -

a. On a toujours $1 - \cos u \geq 0$; d'autre part, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction cos sur le segment $S = [0, u]$ ou $[u, 0]$, on a

$$1 - \cos u = |\cos u - \cos 0| \leq |u| \cdot \max_{t \in S} |\sin t| \leq |u| \, .$$

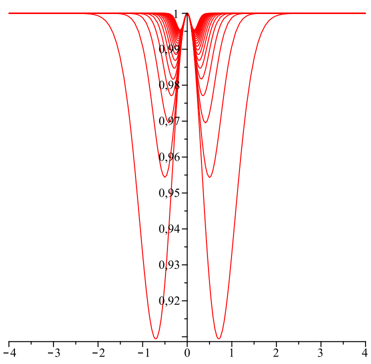
b. Pour tout réel x, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} x\, e^{-nx^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 1$: la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante de valeur 1.

En utilisant **a.**, on a $\forall x \in \mathbb{R} \quad |f_n(x) - 1| = 1 - f_n(x) \leq |x|\, e^{-nx^2}$.

Une petite étude de fonction montre que la fonction $g_n : x \mapsto |x|\, e^{-nx^2}$, qui est paire, admet pour maximum le nombre

$$\|g_n\|_\infty = g_n\Big(\frac{1}{\sqrt{2n}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{2en}} \, .$$

Des inégalités ci-dessus, on déduit $\|f_n - 1\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante 1.



---

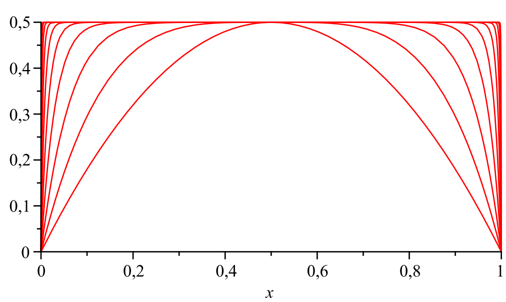
4. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto 2x(1-x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = \varphi^n = \varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (n facteurs, la fonction f_n est l'**itérée n-ième** de φ). Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $I =]0, 1[$ vers une fonction f que l'on précisera. Soit un réel $a \in \Big]0, \dfrac{1}{2}\Big[$, montrer que la convergence est uniforme sur le segment $J = [a, 1-a]$. *On essaiera de préciser les images itérées de ce segment J, c'est-à-dire les ensembles $f_n(J) = \varphi^n(J)$.*

- -

• Soit $x \in]0, 1[$ fixé, on étudie la suite récurrente (x_n) définie par $x_0 = x$ et, pour tout n, $x_{n+1} = \varphi(x_n) = 2x_n(1 - x_n)$. Pour cela, on étudie la fonction $\varphi : x \mapsto 2x(1-x)$ sur $[0, 1]$: on constate que cet intervalle est stable par φ, que φ admet deux points fixes qui sont 0 et $\dfrac{1}{2}$, que $\varphi\Big(\Big[\dfrac{1}{2}, 1\Big]\Big) = \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big]$ tandis que le segment $J = \Big[0, \dfrac{1}{2}\Big]$ est stable par φ et enfin que l'on a $\varphi(x) \geq x$ sur J (*courbe au-dessus de la bissectrice*). De tout cela l'on déduit que $x_n \in J$ pour $n \geq 1$, que la suite (x_n) est croissante à partir du rang 1, comme elle est majorée par $\dfrac{1}{2}$ elle est donc convergente, sa limite ne peut être 0 puisque $x_1 > 0$ donc on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ puisque la limite doit être un point fixe de φ. Résumons : on a prouvé que, pour tout $x \in]0,1[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{2}$: la suite de fonctions (f_n) converge donc simplement sur l'intervalle ouvert $I =]0,1[$ vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$.

• La fonction φ vérifie la relation $\varphi(1-x) = \varphi(x)$ (symétrie de la courbe représentative par rapport à l'axe d'équation $x = \dfrac{1}{2}$), et elle est croissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$; on en déduit que, si on pose $J = [a, 1-a]$ avec $0 < a < \dfrac{1}{2}$ (segment symétrique par rapport à la valeur $\dfrac{1}{2}$), on a $f_1(J) = \varphi(J) = \left[\varphi(a), \dfrac{1}{2}\right]$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(J) = \varphi^{\circ n}(J) = \left[\varphi^{\circ n}(a), \dfrac{1}{2}\right]$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi^{\circ n}(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(a) = \dfrac{1}{2}$ (*cf.* étude de la convergence simple ci-dessus), on déduit la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction constante $\dfrac{1}{2}$ sur J : en effet,

$$\max_{x\in J} \left| f_n(x) - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} - \varphi^{\circ n}(a) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad 0\ .$$



---

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f_n(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$. On pose aussi $f_n(0) = 0$.

a. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $\mathbb{R}$.

b. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a, a]$, avec $a > 0$.

- -

a. Pour tout x réel (nul ou non), on a facilement $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$, la suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Les fonctions f_n ne sont pas bornées sur $\mathbb{R}$ puisque, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{nx} = \dfrac{x}{n}$, et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$. La convergence de la suite (f_n) vers 0 ne peut donc pas être uniforme sur $\mathbb{R}$.

b. En utilisant l'inégalité usuelle $\big|\sin(x)\big| \leq |x|$, pour $x \in S = [-a, a]$, on a

$$\big|f_n(x) - 0\big| \leq x^2\,\frac{1}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \qquad \text{(majoration uniforme)}\ ,$$

donc $\|f_n\|_{\infty,S} \leq \dfrac{a}{n}$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,S} = 0$. La convergence de la suite (f_n) vers 0 est donc uniforme sur $[-a, a]$, elle est donc uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$ (puisque tout segment de $\mathbb{R}$ peut être inclus dans un segment de la forme $[-a, a]$).

Suites de fonctions. Exercices théoriques.

6. On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a, b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a, b]$ convergeant vers x. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$.

- -

L'inégalité triangulaire donne

$$\big|f_n(x_n) - f(x)\big| \leq \big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| + \big|f(x_n) - f(x)\big|\ .$$

Si on se donne $\varepsilon > 0$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, il existe un rang N à partir duquel on a $\|f_n - f\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq N$, on a alors $\big|f_n(x_n) - f(x_n)\big| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, l'application f étant continue au point x, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$, donc il existe un rang N' au-delà duquel on a $\big|f(x_n) - f(x)\big| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Pour $n \geq \max\{N, N'\}$, on a alors $\big|f_n(x_n) - f(x)\big| \leq \varepsilon$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_n) = f(x)$;

---

7. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et non identiquement nulle, telle que $f(0) = f(1) = 0$. Pour tout n entier naturel non nul, on définit $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = \begin{cases} n\, f(nx) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0, 1]$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Montrer que la convergence est uniforme sur $[a, 1]$ pour tout a tel que $0 < a < 1$.

c. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$.

- -

a. On a $f_n(0) = 0$ pour tout n, et si $x > 0$, il existe un rang N (dépendant de x) à partir duquel $\dfrac{1}{n} < x$; pour $n \geq N$, on a alors $f_n(x) = 0$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc stationnaire de valeur nulle à partir du rang N, donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Ily a donc convergence simple de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

La fonction f n'étant pas la fonction nulle, et étant par ailleurs continue sur un segment, elle est bornée et atteint ses bornes, d'où l'existence de $M = \|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et on a $M > 0$. L'expression $f(nx)$ prend, lorsque x décrit le segment $\left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, les mêmes valeurs que $f(x)$ lorsque x décrit $[0,1]$, on en déduit que $\|f_n\|_\infty = nM \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

b. Soit le segment $S = [a,1]$ avec $0 < a < 1$. Dès que l'entier n vérifie $\dfrac{1}{n} < a$ (c'est bien vrai à partir d'un certain rang), alors la fonction f_n est nulle sur S. On a donc $\|f_n\|_{\infty,S} = 0$ pour n assez grand, d'où la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction nulle sur S.

c. Il résulte du théorème de stricte positivité que l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ est un réel strictement positif. Le changement de variable $t = nx$ donne

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n\,f(nx)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = J \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} J\ ,$$

alors que $\displaystyle\int_0^1 \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$, il n'y a donc pas égalité entre limite de l'intégrale et intégrale de la limite.

Interprétation. L'aire sous la courbe reste constante, on peut le retrouver par des considérations géométriques. En effet, la région sous la courbe de f_n se déduit de celle sous la courbe de f par la transformation $u : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x}{n}, ny\right)$. Cette transformation u est linéaire (endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$), elle est représentée canoniquement par la matrice diagonale $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$, dont le déterminant vaut 1, ce qui signifie que la transformation u conserve les aires. *Faire un dessin, en choisissant par exemple $f : x \mapsto x(1-x)$.*

8*. Soit (P_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

- -

Observons d'abord que toute fonction polynomiale bornée sur $\mathbb{R}$ est constante (en effet, si un polynôme P est de degré $d > 0$, on a $P(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} a_d x^d$ avec $a_d \neq 0$, donc $|P(x)|$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui contredit la “bornitude”).

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|P_n - f\|_\infty = 0$, il existe un rang N à partir duquel $\|P_n - f\|_\infty \leq 1$. Pour $n \geq N$, on a alors, par inégalité triangulaire,

$$\|P_n - P_N\|_\infty = \big\|(P_n - f) - (P_N - f)\big\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|P_N - f\|_\infty \leq 2\ ,$$

les fonctions polynomiales $P_n - P_N$ sont bornées donc constantes. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq N$, posons $P_n(x) - P_N(x) = C_n$. La suite de fonctions $(P_n - P_N)_{n\in\mathbb{N}}$ converge par ailleurs (uniformément) sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f - P_N$. On a donc $f(x) - P_N(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = C$ pour tout réel x, autrement dit la fonction $f - P_N$ est constante. Donc $f = P_N + C$ est polynomiale.

9*. Soit $a \in [0,1]$. On définit une suite de fonctions (f_n), sur $\mathbb{R}_+$, par $f_0(x) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(at)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que les fonctions f_n sont polynomiales.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\ .$$

c. En déduire la convergence simple, sur $\mathbb{R}_+$, de la suite de fonctions (f_n).

d. Montrer que cette convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}_+$. Montrer que la fonction limite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et vérifie $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) = f(ax)$.

e. Cas $a = 1$.

- -

a. C'est évident par récurrence sur n. Le lecteur motivé pourra s'amuser à démontrer que la fonction polynomiale f_n est de degré n, et de coefficient dominant $\dfrac{1}{n!}\,a^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

b. On a $f_1(x) = 1 + x$, donc $0 \leq f_1(x) - f_0(x) = (1+x) - 1 \leq x$ sur $\mathbb{R}_+$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$. Passons à l'hérédité: si l'on suppose l'inégalité vérifiée pour un entier naturel n donné, alors pour tout x réel positif, on a

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = \int_0^x \big(f_{n+1}(at) - f_n(at)\big)\,\mathrm{d}t\ .$$

Par l'hypothèse de récurrence, cette expression est positive (par positivité de l'intégrale), et elle est majorée par $\displaystyle\int_0^x \frac{(at)^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}t = a^{n+1}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$, expression qui est elle-même majorée par $\dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!}$ puisque $a \in [0,1]$. La récurrence est ainsi achevée.

c. Fixons x réel positif. Alors la série de terme général $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente (c'est une série exponentielle). Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \big(f_{n+1}(x) - f_n(x)\big)$. Cette dernière série étant télescopique, on a prouvé la convergence de la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Il y a donc bien convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions (f_n).

d. Notons f la fonction limite simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite (f_n), i.e. $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. Soit $S = [m, M]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+$, i.e. $0 \leq m \leq M$. Soit $x \in S$, soit n un entier naturel, soit $N > n$, alors en sommant les inégalités obtenues en **b.**, on a

$$0 \leq f_N(x) - f_n(x) = \sum_{k=n}^{N-1} \big(f_{k+1}(x) - f_k(x)\big) \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}\ ,$$

et en faisant tendre N vers l'infini, on a $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}$. On a ainsi une majoration uniforme qui permet d'écrire $\|f - f_n\|_{\infty,S} \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{M^{k+1}}{(k+1)!}$, et ce majorant tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ puisque c'est le reste d'ordre n d'une série convergente (série exponentielle). On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{\infty,S} = 0$, ce qui caractérise la convergence uniforme de (f_n) vers f sur S.

Remarque. Avec le cours sur les séries de fonctions, on peut aussi dire que, si $x \in S$, on a $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \dfrac{M^{n+1}}{(n+1)!}$ (majoration uniforme), soit $\|f_{n+1} - f_n\|_{\infty,S} \leq \dfrac{M^{n+1}}{(n+1)!}$, d'où l'on déduit la convergence normale sur S de la série de fonctions $\displaystyle\sum_n \big(f_{n+1} - f_n\big)$. Cette convergence normale entraîne alors la convergence uniforme sur S de cette série de fonctions, soit la convergence uniforme sur S de la suite de fonctions (f_n), par le lien entre suites et séries.

La fonction f est déjà continue sur $\mathbb{R}_+$ comme limite uniforme (sur tout segment) d'une suite de fonctions continues (puisque les f_n sont des fonctions polynomiales). Ensuite, si l'on fixe $x \in \mathbb{R}_+$, la convergence uniforme de f_n vers f sur $[0, x]$, et donc de $t \mapsto f_n(at)$ vers $t \mapsto f(at)$, permet l'interversion limite-intégrale:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_{n+1}(x) = 1 + \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^x f_n(at)\,\mathrm{d}t\right) = 1 + \int_0^x \lim_{n\to+\infty} f_n(at)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x f(at)\,\mathrm{d}t\ .$$

La fonction $t \mapsto f(at)$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, le théorème fondamental de l'analyse permet alors d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, avec $f'(x) = f(ax)$.

e. Dans le cas $a = 1$, f vérifie l'équation différentielle $f'(x) = f(x)$, avec la condition initiale $f(0) = 1$ (puisque $f_n(0) = 1$ pour tout n); on conclut que $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$.

Remarque. On peut voir facilement que, dans ce cas, on a $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, autrement dit $f_n(x)$ est la somme partielle d'ordre n de la série exponentielle.

Séries de fonctions.

10. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$. En déduire la valeur des intégrales

$$I_n = \int_0^\pi \frac{2\cos x - 1}{5 - 4\cos x}\ \cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

- -

Calculons d'abord

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{2^n}=\frac{e^{ix}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^n=\frac{e^{ix}}{2-e^{ix}}=\frac{e^{ix}\,(2-e^{-ix})}{(2-e^{ix})\,(2-e^{-ix})}=\frac{2e^{ix}-1}{5-4\cos x}\ .$$

On a reconnu une série géométrique de raison $\dfrac{e^{ix}}{2}$. Il ne reste plus qu'à extraire la partie réelle :

$$\forall x\in\mathbb{R}\qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\cos kx}{2^k}=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikx}}{2^k}\right)=\frac{2\cos x-1}{5-4\cos x}\ .$$

Fixons un entier naturel n, posons alors $f(x)=\dfrac{2\cos x-1}{5-4\cos x}\ \cos(nx)=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(x)$, avec $u_k(x)=\dfrac{\cos(kx)\ \cos(nx)}{2^k}$. Comme $\|u_k\|_\infty=\dfrac{1}{2^k}$, la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1}u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, en particulier elle converge uniformément sur le segment $[0,\pi]$, ce qui autorise à intervertir série et intégrale. Par ailleurs,

$$\int_0^\pi\cos(kx)\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac12\int_0^\pi\cos\big((k+n)x\big)\mathrm{d}x+\frac12\int_0^\pi\cos\big((k-n)x\big)\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2} & \text{si}\quad k=n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\ .$$

On obtient finalement $I_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k}\int_0^\pi\cos(kx)\ \cos(nx)\ \mathrm{d}x=\begin{cases}0 & \text{si}\quad n=0\\ \dfrac{\pi}{2^{n+1}} & \text{sinon}\end{cases}$.

---

11. Soit α un réel. Pour $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=n^\alpha x^n(1-x)$. Étudier le mode de convergence de la suite de fonctions (f_n), puis de la série de fonctions $\sum f_n$.

- -

a. D'abord, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$ puisque $f_n(0)=f_n(1)=0$ et, si $x\in]0,1[$, $f_n(x)=(1-x)\ e^{\alpha\ln(n)+n\ \ln(x)}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées des fonctions puissances et du logarithme.

b. Ensuite, f_n est dérivable sur $[0,1]$ avec $f_n'(x)=n^\alpha\ x^{n-1}\big(n-(n+1)x\big)$. Comme f_n est positive sur $[0,1]$ avec $f_n(0)=f_n(1)=0$, on voit que

$$\|f_n\|_\infty=f_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big)=n^\alpha\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\frac{1}{n+1}=\frac{n^\alpha}{n+1}\left(1+\frac1n\right)^{-n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n^{\alpha-1}}{e}\ .$$

On en déduit que la convergence de la suite (f_n) vers la fonction nulle est uniforme sur $[0,1]$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\|f_n\|_\infty=0$, i.e. si et seulement si $\alpha<1$.

c. Pour tout $x\in[0,1]$, on a $n^2f_n(x)=n^{\alpha+2}x^n(1-x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, la règle de Riemann permet alors d'affirmer (même raisonnement qu'en **a.**) que la série de terme général $f_n(x)$

converge. Pour tout α, il y a donc convergence simple sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum f_n$.

d. De **b.**, on déduit qu'il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[0,1]$ si et seulement si $1-\alpha>1$, i.e. **ssi** $\alpha<0$.

e. Si $\alpha\geq 0$, alors $n^\alpha\geq 1$ pour tout n, on peut donc minorer le reste d'ordre n de la série:

$$r_n(x)=(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty}k^\alpha x^k\geq(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty}x^k=(1-x)\,\frac{x^{n+1}}{1-x}=x^{n+1}\ .$$

Comme $\sup\limits_{x\in[0,1]}(x^{n+1})=1$, on déduit que $\|r_n\|_\infty=\sup\limits_{x\in[0,1]}\big|r_n(x)\big|\geq 1$, donc $\|r_n\|_\infty$ ne tend pas vers zéro, il n'y a pas convergence uniforme de la série $\sum f_n$ dans ce cas.

f. Enfin, chaque fonction f_n atteint son maximum au point $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$. Donc, si "l'on s'éloigne du point 1", c'est-à-dire si l'on se place sur un segment $S=[0,a]$ avec $0<a<1$, il existe un rang à partir duquel $\|f_n\|_{\infty,S}=f_n(a)$, on déduit alors de l'étude de la convergence simple (qu'il s'agisse de la suite ou de la série) que la suite (f_n) converge uniformément sur S, et que la série $\sum f_n$ converge normalement sur S, et ceci quel que soit le réel a.

---

12. On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-n^2x}$ lorsque la série est convergente. On notera $u_n(x)=e^{-n^2x}$.

a. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout entier naturel k, exprimer $f^{(k)}(x)$ comme somme d'une série.

c. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

e. Posons $s_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}u_k(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}s_n(x)$, en déduire $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

- -

a. • Pour $x\leq 0$, la série est grossièrement divergente.

• Pour $x>0$, on a $0\leq e^{-n^2x}\leq e^{-nx}=(e^{-x})^n$, donc la série converge (comparaison à une série géométrique convergente).

On a donc $D_f=\mathbb{R}_+^*$.

b. La série $\sum\limits_{n\geq0}u_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ (en effet, sur un tel intervalle, on a $\|u_n\|_\infty=u_n(a)$, et la série de terme général $u_n(a)$ est convergente), donc f est continue sur $[a,+\infty[$ puisque chaque u_n l'est, puis f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u_n^{(k)}(x)=(-1)^kn^{2k}\,e^{-n^2x}$. Si $a>0$ est fixé, pour tout $x\in[a,+\infty[$, on a $|u_n^{(k)}(x)|\leq|u_n^{(k)}(a)|$, et la série de terme général $|u_n^{(k)}(a)|=$

$n^{2k}e^{-n^2a}$ converge (on vérifie par exemple que $n^2|u_n^{(k)}(a)| = e^{-n^2a+(2k+2)\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).
La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n^{(k)}$ converge donc normalement sur $[a,+\infty[$, et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$. Comme ceci est vrai pour tout $a > 0$, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, à savoir

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=0}^{+\infty} n^{2k}\, e^{-n^2x} .$$

c. On a $f'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\, e^{-n^2x} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

d. On a $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement, donc uniformément sur $[1,+\infty[$, on peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1 .$$

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{x\to 0} u_k(x) = u_k(0) = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \lim_{x\to 0^+} s_n(x) = s_n(0) = n+1 .$$

Par ailleurs, on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}\ f(x) \geq s_n(x)$. On en déduit que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. *En effet, si on se donne $A > 0$, soit n un entier tel que $n+1 > A$; comme $\lim_{x\to 0} s_n(x) = n+1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 < x \leq \alpha \Longrightarrow s_n(x) \geq A$: pour x tel que $0 < x \leq \alpha$, on aura alors a fortiori $f(x) \geq A$.*

Remarque. En encadrant par des intégrales, les 5/2 qui se souviennent de la valeur de l'intégrale de Gauss chercheront à démontrer que $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ lorsque $x \to 0^+$.

---

13. Démontrer la relation $\quad \forall x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}$.

- -

• Prenons d'abord $x \in]-1,1[$, alors $\operatorname{Arctan} x = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\,\mathrm{d}t$.

En effet, la série géométrique de raison $-t^2$ converge et a pour somme $\dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in S$ avec $S = [0,x]$ ou $[x,0]$. Il s'agit donc d'intervertir série et intégrale. En posant $u_n(t) = (-1)^n t^{2n}$, les fonctions u_n sont continues, et $\|u_n\|_{\infty,S} = x^{2n}$, la série géométrique $\sum x^{2n}$ étant convergente. On a ainsi prouvé la convergence normale (donc uniforme) sur S de la série de fonctions $\sum u_n$, ce qui nous autorise à intégrer terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \operatorname{Arctan} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n}\, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}\ .$$

• Il reste à prouver que la relation reste vraie pour $x = -1$ et $x = 1$. Les expressions de part et d'autre du signe égale étant impaires, il suffit de prouver la relation pour $x = 1$. Posons $v_n(x) = (-1)^n\, \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour $x \in [0,1]$. Pour $x \in [0,1]$ fixé, la suite $\left(\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers zéro. Le théorème des séries alternées nous apprend alors que la série $\sum v_n(x)$ converge, mais aussi que son reste d'ordre n est majoré en valeur absolue par le terme d'indice $n+1$, soit

$$\forall x \in [0,1] \qquad |r_n(x)| = \Big|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\Big| \leq |v_{n+1}(x)| = \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}\ .$$

Donc $\|r_n\|_\infty \leq \dfrac{1}{2n+3}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$, on a montré la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la suite (r_n) vers la fonction nulle, autrement dit la convergence uniforme (mais non normale) de la série de fonctions $\sum v_n$ sur ce même segment. La fonction somme $s = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ est alors continue sur $[0,1]$, en particulier au point 1, ce qui donne

$$s(1) = \lim_{x\to1^-} s(x) = \lim_{x\to1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \lim_{x\to1^-} \operatorname{Arctan}(x) = \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}\ ,$$

autrement dit la relation demandée est encore vraie pour $x = 1$, et aussi pour $x = -1$ par parité.

---

14. Soit $\alpha > 0$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = x^\alpha\, e^{-nx^2}$.

a. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$, et normalement sur tout intervalle $[a,+\infty[$ avec $a > 0$. Déterminer la fonction somme.

b. Pour quelles valeurs de α la convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

- -

a. Pour $x = 0$, on convient de poser $0^\alpha = 0$ lorsque α est strictement positif (il est vrai que l'énoncé devrait le préciser), ce qui est cohérent puisqu'alors $\lim\limits_{x\to0^+} x^\alpha = 0$. On a donc $u_n(0) = 0$ pour tout n.

Pour $x > 0$, on écrit $u_n(x) = x^\alpha \big(e^{-x^2}\big)^n$, on reconnaît alors une série géométrique de raison $e^{-x^2} \in]0,1[$, d'où sa convergence.

On a ainsi la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ et l'expression de sa somme s: $s(0) = 0$ et, pour $x > 0$,

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{x^\alpha}{1 - e^{-x^2}}\ .$$

La fonction u_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$u_n'(x) = x^{\alpha-1}\, e^{-nx^2}\, (\alpha - 2nx^2)\ .$$

Comme u_n est positive avec $u_n(0) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$, on déduit que $|u_n| = u_n$ est une fonction croissante sur $\left[0, \sqrt{\dfrac{\alpha}{2n}}\right]$ et décroissante sur $\left[\sqrt{\dfrac{\alpha}{2n}}, +\infty\right[$, donc que, pour tout $a > 0$, on a $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$ qui est le terme général d'une série convergente d'après la question **a.** Ainsi, la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est normale sur toute demi-droite de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

b. Sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\|u_n\|_\infty = u_n\Big(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\Big) = \Big(\sqrt{\frac{\alpha}{2n}}\Big)^{\alpha}\, e^{\frac{\alpha}{2}} = K_\alpha\, \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\ ,$$

où K_α est une constante strictement positive. De l'étude des séries de Riemann, on déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 2$.

---

15. On pose $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ (fonction zéta de Riemann). Quel est l'ensemble de définition de ζ ? Variations de la fonction ζ. Limite en $+\infty$. Équivalent en 1^+.

- -

L'ensemble de définition est $D = D_\zeta =]1, +\infty[$ (*cours*).

Chaque fonction $u_n : x \mapsto u_n(x) = \dfrac{1}{n^x} = n^{-x}$ est strictement décroissante sur D, donc ζ est strictement décroissante sur D par addition d'inégalités.

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ définissant ζ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 1$ fixé : en effet, sur un tel intervalle, on a $\|u_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a)$ terme général d'une série convergente. On peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$. La fonction u_1 est constante de valeur 1, les autres fonctions u_n $(n \geq 2)$ tendent vers 0 en $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 1\ .$$

Pour tout $x > 1$ fixé, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui autorise à utiliser la comparaison série-intégrale : on obtient l'encadrement $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \frac{1}{n^x} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}$, la première inégalité étant valable pour $n \geq 1$, la deuxième pour $n \geq 2$. En sommant ces inégalités pour n de 1 à $+\infty$ (les séries et intégrales impropres entrant en jeu sont convergentes), on obtient l'encadrement

$$\forall x \in D \qquad \frac{1}{x-1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leq \zeta(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1}\ ,$$

d'où $\zeta(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$.

---

16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!\,(x+n)}$. On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

a. Rappeler l'énoncé complet du critère spécial des séries alternées, y compris ce qui concerne la majoration et le signe du reste. Que peut-on dire du signe de la somme de la série ?

b. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$. Quel est le signe de $g(x)$? Calculer $g(0)$.

c. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$, décroissante, et que g''est positive sur $\mathbb{R}_+$.

d. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Donner l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}_+$.

- -

a. Soit une série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$, ou bien $u_n = (-1)^{n+1} v_n$, où (v_n) est une suite positive, décroissante qui tend vers zéro, alors cette série converge ; de plus, le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du même signe que le premier terme négligé u_{n+1}, et est majoré **en valeur absolue** par ce terme : $|R_n| \leq |u_{n+1}| = v_{n+1}$. La somme $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ de la série (si la sommation commence à l'indice 1) peut être considérée comme son reste d'indice 0, elle est donc du même signe que le premier terme u_1, et de plus $|S| \leq |u_1| = v_1$.

b. On a, de façon évidente, $\|u_n\|_\infty = \dfrac{1}{n!}$ (terme général d'une série convergente), d'où la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, la suite de terme général $v_n(x) = |u_n(x)| = \dfrac{1}{(n-1)!\,(x+n)}$ est décroissante et tend vers zéro et le critère spécial des séries alternées s'applique donc : la somme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} v_n(x)$ est du même signe que son premier terme, donc $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Enfin,

$$g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!} = -\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} - 1\Big) = 1 - e^{-1}\ .$$

c. Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et $u_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{(n-1)!\,(x+n)^2}$; la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\|u_n'\|_\infty = \dfrac{1}{n \times n!}$ (terme général d'une série convergente), on peut donc intervertir somme et dérivée : la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $g'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!\,(x+n)^2}$. Comme la suite de terme général

$|u_n'(x)| = \dfrac{1}{(n-1)!\,(x+n)^2}$ est encore positive, décroissante et de limite nulle, le critère spécial s'applique de nouveau et $g'(x)$ est du même signe que le premier terme $u_1'(x)$ de la série, donc négatif : la fonction g est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

On recommence : $u_n''(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!\,(x+n)^3}$; la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n''$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\|u_n''\|_\infty = \dfrac{1}{n^2 \times n!}$ (terme général d'une série convergente), on peut donc intervertir somme et dérivée : la fonction g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ et $g''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!\,(x+n)^3}$. Comme la suite de terme général $|u_n''(x)| = \dfrac{1}{(n-1)!\,(x+n)^3}$ est encore positive, décroissante et de limite nulle, le critère spécial s'applique de nouveau et $g''(x)$ est du même signe que le premier terme $u_1''(x)$ de la série, donc positif.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$, et la convergence normale (donc uniforme) de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ sur $\mathbb{R}_+$ permet d'intervertir somme et limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0\ .$$

17.a. Montrer qu'il existe une unique fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

et exprimer f comme somme d'une série de fonctions.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle est décroissante sur cet intervalle.

c. Donner des équivalents de $f(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et lorsque $x \to +\infty$.

- -

a. Analyse: S'il existe une fonction f satisfaisant ces conditions, alors pour tout x réel strictement positif, on a

$$f(x) = \frac{1}{x^2} - f(x+1) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} + f(x+2) = \cdots = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + (-1)^n\, f(x+n)$$

par une récurrence immédiate sur n. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on déduit que, pour x fixé, $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n\, f(x+n) = 0$. En faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité écrite ci-dessus, on obtient $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$. On a prouvé l'unicité de f.

Synthèse. Pour $x > 0$, posons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$, soit $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ avec $u_k(x) = \dfrac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.

Déjà, cela a bien un sens puisque la série $\sum u_k(x)$ est (absolument) convergente pour tout $x > 0$. La série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement, donc uniformément sur $I = [1, +\infty[$ puisque $\|u_k\|_{\infty,I} = \dfrac{1}{(k+1)^2}$ (suite sommable), cela autorise à intervertir somme et limite en $+\infty$ (théorème de la double limite): $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} u_k(x) = 0$.

Par ailleurs, en utilisant un décalage d'indice, on a, pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f(x+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \frac{1}{x^2}\ .$$

Cette fonction f convient donc, ce qui prouve l'existence.

b. Appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions. Les fonctions u_k sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la série de fonctions $\sum u_k$ converge simplement sur cet intervalle et $u_k'(x) = 2\,\dfrac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$, la série de fonctions $\sum u_k'$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment $S = [a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ puisque $\|u_k'\|_{\infty,S} = \dfrac{2}{(k+a)^3}$ (sommable). On peut donc affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k'(x) = 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}\ .$$

La série de fonctions définissant $f'(x)$ est alternée, la valeur absolue du terme général $\dfrac{2}{(x+k)^3}$ tendant vers 0 en décroissant, on en déduit que $f'(x)$ est du même signe que le premier terme $u_0'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, donc négatif. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. La décroissance de f permet d'écrire, pour tout $x > 1$, l'encadrement

$$\frac{1}{x^2} = f(x) + f(x+1) \leq 2\,f(x) = f(x) + f(x) \leq f(x-1) + f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\ .$$

Comme $\dfrac{1}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, on déduit que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$.

Enfin, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \dfrac{1}{x^2} - f(x+1)$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $f(x+1) \underset{x\to0^+}{\longrightarrow} f(1)$, limite finie, donc $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

18*. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^x\, n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

a. Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b. On rappelle le développement asymptotique $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est la constante d'Euler. Montrer la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln\big(\Gamma(x)\big) = -\ln(x) - \gamma\, x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

c. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- -

a. On a $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \dfrac{(n+1)^x\ (n+1)}{n^x(n+1+x)} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^x \left(1+\dfrac{x}{n+1}\right)^{-1}$. Ce rapport tend vers 1, la règle de d'Alembert n'est donc d'aucun secours. Toutefois,

$$\ln\big(f_{n+1}(x)\big) - \ln\big(f_n(x)\big) = \ln\left(\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right) = x\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n+1}\right),$$

et un petit développement limité montre que $\ln\big(f_{n+1}(x)\big) - \ln\big(f_n(x)\big) = O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$. La série télescopique de terme général $\ln\big(f_{n+1}(x)\big) - \ln\big(f_n(x)\big)$ est donc convergente. On en déduit la convergence de la suite de terme général $\ln\big(f_n(x)\big)$. Posons donc $l(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\big(f_n(x)\big)$. La continuité de l'exponentielle donne enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{l(x)}$, et il ne reste plus qu'à poser $\Gamma(x) = e^{l(x)}$.

b. Pour tout $x > 0$, en posant $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ comme d'habitude, on a

$$\begin{aligned}
\ln\big(\Gamma(x)\big) &= \lim_{n\to+\infty} \ln\big(f_n(x)\big) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(-\ln(x) + x\ \ln(n) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(-\ln(x) + x\ \ln(n) - x\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right)\right) \\
&= -\ln(x) - x \lim_{n\to+\infty} \big(H_n - \ln(n)\big) - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) \\
&= -\ln(x) - \gamma\, x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).
\end{aligned}$$

Remarque. Pour $x > 0$ donné, la série de terme général $\dfrac{x}{n} - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ est bien convergente puisque son terme général est un $O\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)$.

c. Posons $u_n(x) = \dfrac{x}{n} - \ln\Big(1 + \dfrac{x}{n}\Big)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On vient de mentionner la convergence simple sur $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n$. De plus, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u_n'(x) = \dfrac{x}{n(n+x)}$. Si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in S \qquad 0 \leq u_n'(x) \leq \frac{b}{n(n+a)}$$

montre la convergence normale sur S de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 1} u_n'$. Le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions permet alors d'affirmer que la fonction $s = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On y ajoute les termes $-\ln(x)$ et $-\gamma\, x$ qui sont évidemment $\mathcal{C}^1$. Finalement, la fonction $\ln \circ \Gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis par composition avec l'exponentielle qui est aussi $\mathcal{C}^1$, la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

---

19. Pour $x > 0$, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \Big(\prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k} \Big)$.

a. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Former une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

c. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0, en $+\infty$.

- -

a. Posons $f_n(x) = \prod\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{x+k} = \dfrac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et, si $a > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [a, +\infty[\qquad 0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{a(a+1)\cdots(a+n)} \leq \frac{1}{a}\,\frac{1}{n!}\ .$$

Comme la série $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{1}{a}\,\dfrac{1}{n!}$ converge, on a prouvé la convergence normale (donc uniforme) de la série de fonction $\sum f_n$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, donc sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit la bonne définition et la continuité de la fonction somme S sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On note que

$$f_n(x+1) = \frac{1}{(x+1)\cdots(x+n)(x+n+1)} = x\, f_{n+1}(x)\ ,$$

donc

$$\forall x > 0 \qquad S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} x\, f_{n+1}(x) = x \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = x\,\big(S(x) - 1\big) = x\,S(x) - 1\ .$$

c. On a donc $x\,S(x) = 1 + S(x+1)$ pour tout $x > 0$. Lorsque $x \to 0^+$, la fonction S étant continue au point 1, on a

$$\lim_{x\to 0} S(x+1) = \lim_{x\to 1} S(x) = S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1 \ .$$

Donc $\lim_{x\to 0} x\,S(x) = e$, autrement dit $S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e}{x}$.

On a vu que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[1, +\infty[$ par exemple. Comme chacune des fonctions f_n a une limite nulle en $+\infty$, le théorème d'interversion limite-somme s'applique et

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0 \ .$$

Enfin, $S(x) = \dfrac{1 + S(x+1)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$ puisque $\lim_{x\to+\infty} S(x+1) = 0$.

20*. Soit $z \in \mathbb{C}$. Par une interversion somme-limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z \ .$$

Retrouver le résultat en considérant module et argument de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$.

- -

Attention à ne pas introduire de logarithme d'un nombre complexe!

• Par la formule du binôme, on a

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\,\frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n)$$

en posant $u_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{x^k}\,\dfrac{z^k}{k!} & \text{si} \quad x \geq k \\ 0 & \text{si } 0 \leq x < k \end{cases}$. Chaque fonction u_k admet une limite en $+\infty$, à savoir $\lim_{x\to+\infty} u_k(x) = \dfrac{z^k}{k!}$. D'autre part, la série de fonctions $\sum u_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left|u_k(x)\right| \leq \frac{|z|^k}{k!} \ ,$$

terme général d'une série convergente (indépendant de x). Le théorème de la double limite s'applique donc, et permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(n) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} u_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \ .$$

• *Autre méthode.* Posons $z = a + ib$ avec a et b réels. Alors $1 + \dfrac{z}{n} = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right) + i\,\dfrac{b}{n}$, donc $\left|1 + \dfrac{z}{n}\right| = \sqrt{\left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^2 + \dfrac{b^2}{n^2}}$, et le module de $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ est

$$r_n = \left|\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \frac{b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} .$$

Or, tout nombre complexe de la forme $x + iy$ avec x réel **strictement positif** et y réel quelconque, admet pour argument le réel $\theta = \text{Arctan}\,\dfrac{y}{x}$.

Si $n > -a$, alors $\text{Re}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right) > 0$ et ce qui précède s'applique: un argument de $1 + \dfrac{z}{n}$ est alors $\text{Arctan}\left(\dfrac{b}{n+a}\right)$. Un argument du nombre complexe $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ est alors

$$\theta_n = n\ \text{Arctan}\left(\frac{b}{n+a}\right) .$$

On a donc $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = r_n\, e^{i\theta_n}$ pour n assez grand, avec les notations introduites ci-dessus. De l'équivalent classique $\text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on déduit facilement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \theta_n = b$. De plus,

$$\ln(r_n) = \frac{n}{2}\ \ln\left(1 + \frac{2a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right) = \frac{n}{2}\left(\frac{2a}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)\right) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad a .$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = e^a$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n = e^a\, e^{ib} = e^{a+ib} = e^z$.

---

21. Soit (a_n) une suite positive décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1-x) .$$

a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b. Montrer que la convergence est normale si et seulement si la série $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c*. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

- -

a. On a $0 \le a_n \le a_0$ pour tout n, donc $0 \le u_n(x) \le a_0(1-x)\,x^n$. Comme, pour tout $x \in [0,1]$, la série de terme général $a_0(1-x)\,x^n$ est convergente (traiter à part le cas $x = 1$), on déduit par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum\limits_{n\ge 0} u_n(x)$ converge.

b. On calcule $u_n'(x) = a_n\, x^{n-1}\,\big(n - (n+1)x\big)$, le lecteur en déduira en faisant un tableau de variations que

$$\|u_n\|_\infty = u_n\Big(\frac{n}{n+1}\Big) = a_n\,\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{ne} .$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement si et seulement la série de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge (c'est la définition). Par comparaison de séries à termes positifs, cela se produit **ssi** la série $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{a_n}{ne}$ converge, donc **ssi** $\sum\limits_{n\ge 1} \dfrac{a_n}{n}$ converge.

c. Notons $r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$ le reste de la série (que l'on sait convergente pour tout x). La série converge uniformément si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \|r_n\|_\infty = 0$. Pour tout $x\in[0,1[$, en utilisant la décroissance de la suite (a_n), on a

$$\begin{aligned} 0 \leq r_n(x) &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) = (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \\ &\leq a_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = a_{n+1}\, x^{n+1} \leq a_{n+1}\ , \end{aligned}$$

la majoration finale restant vraie pour $x=1$. On a ainsi prouvé que $\|r_n\|_\infty \leq a_{n+1}$. On en déduit déjà le sens indirect: si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors la série de fonctions converge uniformément.

Pour le sens direct, procédons par contraposition: si la suite (a_n) ne tend pas vers 0, comme elle est positive (donc minorée) et décroissante, elle admet une limite $l>0$, et on a $a_n\geq l$ pour tout n. Donc, pour tout $x\in[0,1[$, on a la minoration

$$r_n(x) = (1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \geq l\,(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = l\, x^{n+1}\ .$$

Donc $\|r_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} r_n(x) \geq \sup_{x\in[0,1]}\left(l\,x^{n+1}\right) = l>0$ et, dans ce cas, $\|r_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, et la convergence de la série de fonctions n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

---

22. Soit $\alpha>1$.

a. Ensemble de définition D de la fonction $S_\alpha : x\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+n^\alpha x^2}$. La fonction S_α est-elle continue sur D ?

b. Donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ lorsque $x\to+\infty$.

c. La fonction S_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, donner la valeur de son intégrale.

Pour tout réel $s>1$, on pourra poser $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$ (fonction zêta de Riemann).

- -

a. Posons $u_n(x)=\frac{1}{1+n^\alpha x^2}$, la fonction u_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On a $u_n(0)=1$ donc la série de terme général $u_n(0)$ diverge. Pour $x\neq 0$, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha x^2}$, donc $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ converge puisque $\alpha>1$ (série de Riemann). Ainsi, $D=\mathbb{R}^*$.

Soit $S=[a,b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ $(0<a<b)$, alors $\|u_n\|_{\infty,S}=u_n(a)=\frac{1}{1+n^\alpha a^2}$, qui est le terme général d'une série convergente. On a ainsi convergence normale de la série

de fonctions $\sum u_n$ sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, ce qui assure la continuité de S_α sur $\mathbb{R}_+^*$. On a aussi continuité sur $\mathbb{R}_-^*$ par parité.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha x^2}$, d'où l'idée de conjecturer que cela "passe à la somme": $S_\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha x^2} = \frac{\zeta(\alpha)}{x^2}$. Prouvons-le, pardi! Il s'agit en fait de montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\, S_\alpha(x) = \zeta(\alpha)$. Or, $x^2\, S_\alpha(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$, avec $v_n(x) = x^2\, u_n(x) = \dfrac{x^2}{1+n^\alpha x^2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = \frac{1}{n^\alpha}$. De plus, $0 \le v_n(x) \le \dfrac{1}{n^\alpha}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, ce qui montre la convergence normale de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $\mathbb{R}^*$, on peut donc intervertir somme et limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 S_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} v_n(x) = \zeta(\alpha)\ ,$$

ce qu'il fallait prouver.

c. Chaque fonction u_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car p.p.c. en 0, et $u_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^\alpha x^2}$), et

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+n^\alpha x^2} = \frac{1}{\sqrt{n^\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{2\, n^{\alpha/2}}\ .$$

Ainsi, si $\alpha > 2$, alors la série de terme général $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} u_n = \int_{\mathbb{R}_+^*} |u_n|$ converge (série de Riemann), cela permet d'appliquer le théorème d'intégration terme à terme: la fonction $S_\alpha = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$\int_0^{+\infty} S_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2\, n^{\alpha/2}} = \frac{\pi}{2}\,\zeta\Big(\frac{\alpha}{2}\Big) \qquad \text{pour} \qquad \alpha > 2\ .$$

Si $1 < \alpha \le 2$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} \int_{\mathbb{R}_+^*} u_n$ diverge, mais cela ne prouve rien *a priori*. Considérons alors les sommes partielles $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Comme les u_k sont positives, on a $0 \le s_n \le S_\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Si S_α était intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème de convergence dominée s'appliquerait à la suite (s_n) des sommes partielles: chacune de ces fonctions s_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on a la convergence simple de (s_n) vers S_α sur $\mathbb{R}_+^*$, on a la domination des s_n par la fonction S_α supposée intégrable, on déduirait donc la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{2\,k^{\alpha/2}}$, on aurait donc convergence d'une série de Riemann d'exposant $\dfrac{\alpha}{2}$ ce qui est absurde. Donc S_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ dans ce cas.

Bilan. La fonction S_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\alpha > 2$ et, dans ce cas,

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} S_\alpha = \frac{\pi}{2}\,\zeta\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

23*. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour $x \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$, on pose $g(x) = \dfrac{f(3x) - f(x)}{x}$.
On suppose dans cet exercice que la fonction g admet une limite réelle a en 0.
En considérant la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 1} g_k$, avec $g_k(x) = \dfrac{1}{3^k}\, g\left(\dfrac{x}{3^k}\right)$, montrer que f est dérivable en 0, et exprimer $f'(0)$ à l'aide du réel a. *Réponse:* $f'(0) = \dfrac{a}{2}$.

- -

La fonction g est prolongeable en une fonction continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, donc elle est bornée, posons $\left|g(x)\right| \leq M$. On a alors

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{3}\right] \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \left|g_k(x)\right| = \frac{1}{3^k}\left|g\left(\frac{x}{3^k}\right)\right| \leq \frac{M}{3^k}\,,$$

d'où la convergence normale, donc uniforme, sur $\left]0, \frac{1}{3}\right]$, de la série de fonctions $\sum g_k$.
Chaque fonction g_k admet une limite en 0, à savoir $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g_k(x) = \frac{a}{3^k}$. Le théorème de la double limite permet donc d'affirmer que

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} g_k(x) = a \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{a}{2}\,.$$

Mais, pour tout $x \in \left]0, \frac{1}{3}\right]$, par télescopage, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{3^k}\,\frac{f\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{3^k}\right)}{\frac{x}{3^k}} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(f\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{3^k}\right)\right) = \frac{f(x) - f(0)}{x}\,.$$

On a donc montré que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{a}{2}$, autrement dit la dérivabilité en 0 de la fonction f, avec $f'(0) = \dfrac{a}{2}$.