DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 3

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **10/11/2023**

ATTENTION! Chaque candidat(e) traitera au choix:
- PROBLÈME 1 et PROBLÈME 2
ou bien
- PROBLÈME 1 et EXERCICE 1 et EXERCICE 2

PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on note $I = \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, et $E = L^2_c(I, \mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions continues et de carré intégrable sur I à valeurs réelles.

Partie A. Questions de cours.

A.1. Montrer que, pour tous réels a et b, on a $ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

A.2. En déduire que, si deux fonctions f et g appartiennent à E, alors fg est intégrable sur I.

A.3. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

A.4. Montrer que si, pour tout couple $(f, g) \in E^2$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$, alors on définit sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E un produit scalaire. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie B.

B.1. Pour tout réel a strictement positif, on pose $J(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\, \sin^2(x)}$.

a. Montrer que $J(a) = 2 \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a\, \sin^2(x)}$.

b. En utilisant le changement de variable $t = \tan(x)$, montrer que $J(a) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1 + a}}$.

B.2. Dans cette question, on fixe un réel α strictement positif. On introduit la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad f_\alpha(x) = \frac{1}{1 + x^\alpha\, \sin^2(x)} .$$

Pour tout k entier naturel, on pose $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f_\alpha(x)\, \mathrm{d}x$.

a. Prouver l'encadrement $J\big((k+1)^\alpha\, \pi^\alpha\big) \leq u_k \leq J(k^\alpha \pi^\alpha)$.

b. Pour quelles valeurs de α la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est-elle sommable ?

c. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$?

B.3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. A-t-on nécessairement $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$? *On pourra considérer certaines des fonctions f_α introduites ci-dessus.*

Partie C.

Dans cette partie, on note h une application continue sur I à valeurs réelles, et telle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$ soit convergente.

C.1. Pour tout n entier naturel, on pose $V_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\, \mathrm{d}t$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} V_n = 0$.

C.2. En déduire qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs, telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} h(a_n) = 0$.

Partie D.

Soit F l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs réelles, telles que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2 \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$ soient convergentes.

D.1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans toute la suite du problème, on note f un élément de F.

D.2. Montrer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 \,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, f'(t) \,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

D.3. Établir l'égalité

$$\int_0^{+\infty} t\, f(t)\, f'(t) \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} f(t)^2 \,\mathrm{d}t\ .$$

On pourra utiliser la question **C.2.**

D.4. Prouver l'inégalité

$$\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)^2 \leq 4 \left(\int_0^{+\infty} t^2\, f(t)^2 \,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2 \,\mathrm{d}t\right).$$

PROBLÈME 2

PARTIE A. Un cousin de Vandermonde.

Notations :

- Si x est un nombre réel et k un entier naturel non nul, on posera

$$[x]_k = x(x-1)\cdots(x-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j)\ .$$

On conviendra que $[x]_0 = 1$.

- Si $d_1, \cdots, d_n$ sont n réels ($n \geq 2$), on considère le déterminant d'ordre n:

$$D_n(d_1, \cdots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ [d_1]_1 & [d_2]_1 & \cdots & [d_n]_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [d_1]_{n-1} & [d_2]_{n-1} & \cdots & [d_n]_{n-1} \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant de la matrice carrée d'ordre n dont le coefficient d'indices (i,j) vaut $[d_j]_{i-1}$, avec $1 \leq i, j \leq n$.

1. Montrer que, si les n réels $d_1, \cdots, d_n$ ne sont pas tous distincts, alors $D_n(d_1, \cdots, d_n) = 0$.

2. Soient x, y, z trois réels. Calculer les déterminants $D_2(x,y)$ et $D_3(x,y,z)$. On donnera une expression factorisée de ce dernier.

3. Dans cette question, on fixe n réels $d_1, \cdots, d_n$ supposés deux à deux distincts.

a. Montrer que l'application

$$\begin{cases} P : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto D_{n+1}(d_1, \cdots, d_n, x) \end{cases}$$

est polynomiale de degré au plus n, le coefficient de x^n étant $D_n(d_1, \cdots, d_n)$.

b. En utilisant la question **1.**, expliciter $P(x)$ en fonction de $D_n(d_1, \cdots, d_n)$.

4. Déduire des questions précédentes la relation

$$\forall n \geq 2 \quad \forall (d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{R}^n \qquad D_n(d_1, \cdots, d_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i) \ .$$

PARTIE B. Le wronskien d'une famille de fonctions.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de I vers $\mathbb{R}$. On définit une fonction $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ de I vers $\mathbb{R}$ par la relation

$$\forall x \in I \qquad W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} .$$

On dit que la fonction $W_n(f_1, \cdots, f_n)$ est le **wronskien** de la famille de fonctions $(f_1, \cdots, f_n)$.

5. Exemple des fonctions monomiales. Dans cette question, $I = \mathbb{R}_+^*$, et on suppose que chaque fonction f_k est monomiale, i.e. est de la forme $f_k : x \mapsto a_k \, x^{d_k}$, où a_k est un réel non nul et d_k un entier naturel, $1 \leq k \leq n$. Montrer que

$$\forall x \in I \qquad W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \Big(\prod_{k=1}^{n} a_k \Big) \cdot D_n(d_1, \cdots, d_n) \cdot x^{d_1 + \cdots + d_n - \frac{n(n-1)}{2}} .$$

On recherchera des facteurs communs aux coefficients de chaque ligne ou de chaque colonne du déterminant à calculer.

On rappelle la **formule de Leibniz**: si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, alors fg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et, pour tout k entier naturel, on a $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)}$.

6. Soient $f_1, \cdots, f_n$ et g des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I. Prouver la relation

$$W_n(f_1 g, f_2 g, \cdots, f_n g) = g^n \cdot W_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) \ .$$

On détaillera les opérations élémentaires effectuées sur les lignes ou les colonnes. On pourra commencer par examiner au brouillon le cas $n = 2$, éventuellement $n = 3$.

7. On suppose que la fonction f_1 ne s'annule pas sur I. Prouver la relation

$$W_n(f_1, f_2, \cdots, f_n) = f_1^n \cdot W_{n-1}\left(\left(\frac{f_2}{f_1}\right)', \left(\frac{f_3}{f_1}\right)', \cdots, \left(\frac{f_n}{f_1}\right)' \right) .$$

PARTIE C. Annulation du wronskien.

8. Montrer que, si $(f_1, \cdots, f_n)$ est une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, alors

$$\forall x \in I \qquad W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = 0 \; .$$

9. Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f_1 ne s'annulant pas sur I. On suppose que la fonction $W_2(f_1, f_2)$ est nulle sur I. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f_2 = \lambda f_1$.

10. On considère la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

a. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout k entier naturel, il existe un polynôme P_k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad h^{(k)}(x) = P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \; .$$

c. En déduire que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d. À l'aide de la fonction h, construire un exemple de deux fonctions f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, non colinéaires, et telles que $W_2(f_1, f_2) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

11. On note I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I telles que $W_n(f_1, \cdots, f_n) = 0$ sur I. En utilisant la question **7.**, montrer qu'il existe un intervalle ouvert J non vide, inclus dans I, tel que les restrictions des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ à J constituent une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$.

EXERCICE 1

On rappelle, pour tout t réel, les relations

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \; .$$

1. Prouver, pour tout t réel, la relation

$$\mathrm{ch}(2t) = 1 + 2\ \mathrm{sh}^2(t) \; .$$

2. Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\, \mathrm{d}x$.

Montrer sa convergence, puis montrer que $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)} \mathrm{d}t$, et enfin calculer l'intégrale J.

On utilisera plusieurs changements de variable.

3. En posant enfin $y = \dfrac{1}{x}$, déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4}$.

EXERCICE 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et, pour $n \geq 3$, Δ_n est un déterminant d'ordre $n+1$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = u_n v_n$.

1. Calculer Δ_1 et Δ_2.

2. Pour $n \geq 3$, prouver la relation

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \, \Delta_{n-2} \; .$$

3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Prouver, pour tout n entier naturel non nul, l'inégalité

$$\Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \; .$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + a_k)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + a_k)$, et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

a. Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b. Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

a. Vérifier que $\Delta_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. Pour $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} t_n$.

c. Prouver alors que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?