# DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 3
# COMMENTAIRES
# PSI2 2023-2024

## PROBLÈME 1

**A.2.** NE PAS OUBLIER LES VALEURS ABSOLUES! Pour montrer que $fg$ est intégrable, il faut majorer $|fg|$, et pas seulement $fg$ lui-même!

**A.4.** Beaucoup d'erreurs, notamment pour le caractère positif du produit scalaire (j'ai vu: si $f$ et $g$ sont positives, alors $(f|g) \geq 0$, ce qui est vrai... mais n'a rien à voir avec la question!!!). De nombreuses erreurs aussi dans l'écriture de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**B.1.a.** Relation de Chasles presque toujours vue, mais après, il y a de nombreuses propositions de changements de variable qui ne donnent pas toujours ce qui est attendu. Sans doute parce que les relations trigonométriques de base comme $\sin(\pi - x) =?$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =?$, etc. sont mal connues. Ne savez-vous donc pas vous aider du dessin d'un cercle trigonométrique ? Et les arguments du style: "sur tel intervalle, la fonction sinus prend les mêmes valeurs que sur tel autre" sont assez fumeux! Dans toute discipline scientifique, l'utilisation d'un vocabulaire précis est indispensable!

**B.1.b.** Peu de calculs aboutissent, il serait bien de revoir un peu les calculs de primitives (cours de 1ère année) et, encore un fois, LA TRIGO: comment transformer $\sin^2\big(\text{Arctan}(t)\big)$ ?

**B.2.a.** Quelques cafouillages: non, la fonction $f_\alpha$ n'est pas décroissante, il y a dedans un sinus qui oscille, c'est son job! Il faut bien sûr utiliser la croissance de l'intégrale et le fait que la fonction $\sin^2$ est $\pi$-périodique pour se ramener à l'intervalle $[0, \pi]$.

**B.2.b.** On retrouve les mêmes erreurs que dans le petit contrôle d'avant les vacances de Toussaint: nombre d'entre vous prétendent, à partir d'une seule inégalité, obtenir une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha$ pour que la série $\sum u_k$ converge! Mais pour cela, les deux inégalités de la question **B.2.a.** doivent être exploitées, mentionner un équivalent de $u_k$ est sans doute ce qui est le plus convaincant.

**B.2.c.** Beaucoup de réponses fausses à cette question, souvent à cause d'un équivalent faux de $f_\alpha(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$. En effet, lorsque $x \to +\infty$, le terme constant 1 n'est pas négligeable devant le terme $x^\alpha \sin(x)$, puisque ce dernier repasse périodiquement par la valeur 0 (pour $x = k\pi$ avec $k$ entier).

**B.3.** Très peu de bonnes réponses... et beaucoup de n'importe quoi! Félicitations à l'un de vous qui a très bien compris la problématique et l'a même illustrée par un schéma très pertinent!

**C.2.** Question trop difficile (et pourtant, c'est extrait d'un sujet e3a, PSI 2017)! Je n'ai vu aucune bonne réponse.

**D.1.** Éviter d'écrire des égalités du genre

$$\int_0^{+\infty} t^2\,\big(\lambda f(t) + g(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \lambda^2 \int_0^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t + 2\lambda \int_0^{+\infty} t\,f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} t^2 g(t)^2\,\mathrm{d}t$$

tant que l'on sait pas encore si toutes ces intégrales convergent! Je sais que je me répète (mais c'est aussi la base de la pédagogie, à ce que l'on dit), mais prenez l'habitude de travailler sur les intégrandes (majorer le module, chercher des équivalents aux bornes) plutôt que sur des intégrales dont l'existence n'est pas encore assurée!

**D.3.** Suite de la question **C.2.** donc trop difficile aussi, aucune réponse totalement correcte!

**D.4.** Il y a du Cauchy-Schwarz dans l'air...

# PROBLÈME 2

**2.** Très peu de résultats présentés sous forme factorisée pour $D_3(x, y, z)$, j'en viens presque à me demander si vous comprenez ce que signifie le mot "factorisé"!

**3.** Bien sûr, il s'agit de calquer la méthode vue en cours pour le déterminant de Vandermonde, le résultat obtenu à la fin est d'ailleurs le même. Évitez toutefois de faire du "par cœur" et répondez aux questions dans l'ordre où elles sont posées!

**5.** Beaucoup de réponses à peu près correctes, si ce n'est que j'aurais aimé un peu plus de rédaction (on trouve tel facteur commun sur telle ligne, tel autre sur telle colonne, tout cela doit être précisé).

**6.** Les choses se compliquent un peu, les opérations élémentaires à effectuer deviennent un peu plus compliquées à décrire précisément, j'ai été moins exigeant sur la rigueur de cette question. Félicitations à l'un de vous qui a remarqué que la "matrice wronskienne" de la famille de fonctions $(f_1 g, \cdots, f_n g)$ se déduit de celle de la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ par multiplication par une matrice triangulaire et qui en déduit élégamment la relation demandée sur les déterminants.

**7.** Très peu de bonnes réponses pour cette question, pourtant pas très difficile.

**8.** J'ai vu sur plusieurs copies: "si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée, alors il existe deux fonctions $f_i$ et $f_j$, avec $i \neq j$, qui sont colinéaires". Ceci est totalement faux. Rappelez-vous que trois vecteurs dans un plan forment toujours une famille liée!

**9.** Peu de réponses rigoureuses: on ne pas diviser par $f_2$ qui n'est pas supposée non nulle! Le réel $\lambda$ recherché doit bien sûr être indépendant de la variable $x$.

**10.b.** Aucune réponse totalement correcte, je crois, pour cette question pourtant classique. Peut-être parce que peu d'entre vous savent dériver correctement $x \mapsto P\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Une récurrence me semble ici nécessaire.

**10.c.** Plusieurs considèrent le résultat comme évident, ne voyant même pas qu'il y a un problème de "raccordement" en 0...

---

# EXERCICE 1

Petit exercice de calcul intégral sans grande difficulté, et pourtant les seules questions traitées sont souvent le **1.** et la convergence de l'intégrale du **2.** Revoir un peu le calcul intégral de 1ère année, cela peut servir d'avoir un peu de savoir-faire sur ces questions (comme sur les développements limités, la trigo, etc.)

## EXERCICE 2

**2.** Merci de détailler les opérations faites (développement par rapport à quelle ligne ou quelle colonne ?).

**3.** Montrer d'abord que $\Delta_n$ est positif!

**5.a.** Le critère des équivalents pour les séries à termes positifs a peu été mentionné.

**5.b.** J'ai lu des choses bizarres, comme une comparaison de suites: si $(\Delta_n)$ est majorée par une suite convergente $(P_n)$, alors $(\Delta_n)$ est aussi convergente ? C'est bien évidemment faux! Ici, on s'en sort car la suite $(\Delta_n)$ est aussi croissante, on invoque alors le théorème de la limite monotone.

**6.** Quelques confusions entre suites et séries, lien entre suites et séries (séries télescopiques) à revoir.