Suites et séries de fonctions

cf. programme précédent.

Réduction des endomorphismes

Le programme précédent, plus:

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée: définition et propriétés, écriture développée $\chi_A = X^n - \text{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme caractéristique. Conséquences.

Notion de multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit sur un sous-espace stable. Inégalité $1 \leq \dim\big(E_\lambda(u)\big) \leq m_\lambda$ pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$.

Expression du déterminant et de la trace à l'aide des valeurs propres lorsque χ_A est scindé.

Notion d'endomorphisme (ou de matrice) diagonalisable. Diagonalisation effective $A = PDP^{-1}$, interprétation des matrices P et D.

Condition suffisante de diagonalisablilité: si un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet n valeurs propres distinctes (ou si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples), alors il est diagonalisable.

Conditions nécessaires et suffisantes de diagonalisablilité:

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** $\displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$ **ssi** $\displaystyle\sum_{\lambda\in\text{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E)$.

u est diagonalisable **ssi** (χ_u est scindé et $\forall\lambda \in \text{Sp}(u) \quad \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$).

Démonstrations de cours ou proches du cours

- La convergence normale d'une série de fonctions entraîne la convergence uniforme.
- Exemple où il y a CVU, mais pas CVN.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. Conséquences.
- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.
- Existence de valeurs propres si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall\lambda \in \text{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\Longleftrightarrow \displaystyle\bigoplus_{\lambda\in\text{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \Longleftrightarrow \sum_{\lambda\in\text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.