PARTIE A. Recherche de sous-espaces stables. Étude d'exemples.

1. Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note u et v les endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices A et B respectivement.

On notera $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

a. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme u, ainsi que le sous-espace $\mathrm{Im}(u)$.

b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme v, ainsi que le sous-espace $\mathrm{Im}(v)$.

2. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On note f et g les endomorphismes de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices M et N respectivement.

a. Diagonaliser la matrice M. *On pourra observer que les valeurs propres et vecteurs propres de M "se voient" sans faire de calculs, on expliquera alors les observations faites.*

b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n, soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M. On note $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$, admettant pour équation cartésienne $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$, les c_i $(1 \leq i \leq n)$ étant des scalaires non tous nuls, i.e.

$$H = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = 0\right\}.$$

On introduit le vecteur-colonne $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$.

a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Vérifier que $X \in H \iff C^\top X = 0$.

b. En déduire que, si C est vecteur propre de la matrice $M^\top$, alors l'hyperplan H est stable par l'endomorphisme f.

c. Démontrer la réciproque: si l'hyperplan H est stable par f, alors C est vecteur propre de la matrice $M^\top$.

4.a. En utilisant les résultats de la question **3.**, déterminer les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par l'endomorphisme f introduit à la question **2.** Donner ensuite la liste de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f. Vérifier que les plans stables se décomposent en sommes de deux droites stables.

b. De façon analogue, déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme g introduit à la question **2.**

PARTIE B. Recherche de sous-espaces stables. Étude théorique.

Dans cette partie, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non réduit à $\{0\}$.

5.a. Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces de E stables par f, et donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui n'admet que deux sous-espaces stables.

b. Montrer que, si E est de dimension finie $n \geq 2$ et si f est non nul et non injectif, alors il existe au moins trois sous-espaces de E stables par f, et au moins quatre lorsque n est impair.

c. Donner un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ admettant exactement trois sous-espaces stables.

6.a. Montrer que tout sous-espace de E engendré par une famille de vecteurs propres de f est stable par f.

b. Montrer que, si f admet un sous-espace propre de dimension au moins égale à 2, alors il existe une infinité de droites de E stables par f.

c. Que dire de f si tous les sous-espaces vectoriels de E sont stables par f ?

7. Dans cette question, E est supposé de dimension finie.

a. Montrer que, si f est diagonalisable, alors tout sous-espace vectoriel F de E admet un supplémentaire stable par f. *On pourra introduire une base de F, et une base de E constituée de vecteurs propres de f.*

b. Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, et si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire dans E stable par f, alors f est diagonalisable. *On pourra considérer le sous-espace* $S = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$. Qu'en est-il si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

8. On suppose E de dimension finie n. Montrer que f est trigonalisable si et seulement s'il existe une famille $(F_0, F_1, \cdots, F_n)$ de sous-espaces de E stables par f tels que $F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n$ et $\dim(F_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

PARTIE C. Une CNS de stabilité (cas diagonalisable).

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note $E_i = E_{\lambda_i}(f)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

L'objectif est de démontrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$.

9. Soit F un s.e.v. de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p}(F \cap E_i)$. Montrer que F est stable par f.

10. Réciproquement, soit F un s.e.v. de E stable par f. Soit x un vecteur non nul de F.

a. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$.

b. Si on pose $J_x = \{i \in [\![1, p]\!] \mid x_i \neq 0\}$, alors J_x est une partie non vide de l'intervalle entier $[\![1, p]\!]$, soit r son cardinal ($1 \leq r \leq p$). Quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres associés), on peut supposer que $J_x = [\![1, r]\!]$. On a ainsi $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. On pose $V_x = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_r)$.

Montrer que la famille $\mathcal{B}_x = (x_1, \cdots, x_r)$ est une base de V_x.

c. Montrer que, pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, le vecteur $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x, et donner la matrice de la famille de vecteurs $\mathcal{F}_x = \big(x, f(x), \cdots, f^{r-1}(x)\big)$ relativement à la base $\mathcal{B}_x$.

d. Montrer que $\mathcal{F}_x = \big(f^{j-1}(x)\big)_{1 \leq j \leq r}$ est une base de V_x.

e. En déduire que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, le vecteur x_i appartient à F, et conclure.