Réduction des endomorphismes

Tout le chapitre, i.e. le programme précédent, plus:

Théorème de Cayley-Hamilton.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable **ssi** il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, ou **ssi** le polynôme $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable est aussi diagonalisable.

Endomorphismes ou matrices trigonalisables.

$u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable **ssi** χ_u est scindé (toujours vrai si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Applications de la réduction: calculs de puissances de matrices, étude de suites vectorielles définies par une relation de récurrence linéaire.

Séries entières

Notion de série entière associée à une suite de coefficients (a_n).

Lemme d'Abel: si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ comme la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

La série entière converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$.

Définition du disque de convergence $D(O, R)$, de l'intervalle de convergence $]-R, R[$.

La série entière converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(O, r)$ avec $r < R$.

Comparaison: si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou bien si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$.
Si $|a_n| \underset{n \to +\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Lien entre polynômes annulateurs et valeurs propres.
- Existence de valeurs propres si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E de dimension impaire.
- Inégalité $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad 1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- u est diagonalisable $\iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim(E)$.
- $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement A et B sont diagonalisables.
- Théorème de Cayley-Hamilton. Preuve dans le cas diagonalisable (*voire trigonalisable ?*)
- Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Nature de la série entière $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq R$.