Rayon de convergence.

1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$, avec

a. $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$; **b.** $a_n = n^{(-1)^n}$; **c.** $a_n = \dbinom{2n}{n}$; **d.** $a_n = \lfloor 10^n\pi\rfloor - 10\times\lfloor 10^{n-1}\pi\rfloor$

(dans le **d.**, le coefficient a_n est la n-ème décimale du nombre π).

2. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$, avec $l \in \overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$?

3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$.

a. Soit P un polynôme non nul. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} P(n)\, a_n\, z^n$.

b. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^2 z^n$.

4. Soit une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence non nul. Montrer que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n\, z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

Expression de la somme d'une série entière.

5. Rayon de convergence et calcul de la somme des séries entières $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)}$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{n!} x^n$.
(*ce sont deux questions indépendantes*)

6. Rayon de convergence et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n-3}{(n-1)!}\, x^n$.

7. On rappelle que $\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\, x^n}{n}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ et calculer sa somme en tout point x de l'intervalle ouvert de convergence. Que se passe-t-il aux bornes de cet intervalle ?

8. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{n\, x^n}{(2n+1)!}$.

9. Soit $f(x) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$.

a. Ensemble de définition de f ?

b. Exprimer $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles sur $]-1, 1[$.

c. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.

10. Rayon de convergence et calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{n}\, x^n$.

11. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

12. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, de somme $f(z)$.

a. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ à l'aide de f.

b. Même question avec $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

13. Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Déterminer le rayon de convergence R et la somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Quelle est la nature des séries numériques $\displaystyle\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$? En cas de convergence, calculer leur somme.

Propriétés de la fonction somme.

14. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ pour tout réel x tel que la série converge.

a. Quel est l'ensemble de définition de f ?

b. Montrer que f est continue sur $[-1, 1[$.

c. Quelle est la limite de f en 1^- ?

15. Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par :

- $f(x) = \dfrac{\operatorname{Arctan}\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}}$ pour $x < 0$;
- $f(0) = 1$;
- $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ pour $x > 0$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

16. Pour n entier naturel, on pose $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un carré} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,

$b_n = \operatorname{Card}\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 = n\right\}$ et $c_n = \operatorname{Card}\left\{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p^2 + q^2 \leq n\right\}$.

On admet par ailleurs que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $B(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ et $C(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

a. Donner une autre expression de $A(x)$. Par une méthode de comparaison série-intégrale, donner un équivalent de $A(x)$ lorsque $x \to 1^-$.

b. Exprimer $B(x)$ et $C(x)$ à l'aide de $A(x)$, et en donner des équivalents lorsque $x \to 1^-$.

17. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, non nulle, et N-périodique avec $N \in \mathbb{N}^*$.

a. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$?

b. Montrer que la fonction somme de cette série entière est une fonction rationnelle.

Développement en série entière.

18. Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, et que l'on peut écrire, sur $\mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = P_n\left(\dfrac{1}{x}\right) f(x)$, où P_n est une fonction polynomiale.

b. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier naturel n.

c. La fonction f est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ?

19. Pour tout x réel, on pose $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} e^{-k(1-ikx)}$.

a. Montrer que la fonction g est définie, et de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que, pour tout p entier naturel, on a $\left|g^{(p)}(0)\right| \geq p^{2p}\, e^{-p}$.

c. En déduire que la série de Taylor de g a un rayon de convergence nul.

20. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1, 1[$.

En déduire la relation

$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad \operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\ .$$

Cette dernière relation reste-t-elle vraie pour $x = -1$ et $x = 1$?

21. Pour x réel non nul, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

b. Montrer que la fonction f, ainsi prolongée, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter son développement.

22. On fixe $a \in [0, 1[$. Pour x réel, on pose $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}(a^n\, x)$.

a. Montrer que la fonction S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b. Trouver une relation entre $S(ax)$ et $S(x)$.

c*. En déduire que S est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter ce développement.

23.a. Former de deux façons le développement en série entière de

$$f : x \mapsto e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t\ .$$

b. En déduire la relation

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} \binom{2n}{n} = \frac{4^n}{2n+1}\ .$$

Autres exercices.

24*. Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que cette série entière converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer que les a_n sont nuls à partir d'un certain rang.

25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|f^{(n)}(x)\right| \leq M .$$

Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

26. Calculer $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

On pourra utiliser le développement en série entière de $\operatorname{Arctan} x$.

27. Soit $\displaystyle\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels, convergente, de somme S. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle d'ordre n, et $R_n = S - S_n$ le reste d'ordre n. Enfin, pour tout réel x, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!}\, x^n$.

a. Montrer que l'on peut écrire $S - e^{-x} f(x) = e^{-x} \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{R_n}{n!}\, x^n \right)$.

b. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} e^{-x}\, f(x) = S$.

28. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On pose $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour $|z| < R$.

a. Soit r tel que $0 < r < R$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad a_p r^p = \displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it})\, e^{-ipt}\, \mathrm{d}t$.

En déduire que $|a_p| \leq \dfrac{M(r)}{r^p}$, où $M(r) = \displaystyle\max_{|z|=r} |f(z)|$.

b. *Application.* Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

29. Pour α réel et n entier naturel non nul, on pose $\dbinom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$, par convention $\dbinom{\alpha}{0} = 1$. Prouver la **relation de Chu-Vandermonde**:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} .$$

Exercices avec Python.

30. La suite de Fibonacci (a_n) est définie par

$$a_0 = 0 \quad ; \quad a_1 = 1 \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ .$$

a. Écrire une fonction retournant a_n, prenant n comme argument.

b. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout x tel que cette série entière converge. Représenter la somme partielle d'indice 20 de cette série entière dans l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.

c. Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, où R est le rayon de convergence, on a $f(x) = \dfrac{x}{1 - x - x^2}$.

d. Représenter sur le même graphique la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{1 - x - x^2}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,6]$.

31. Pour tout n entier naturel, on pose $D_n = \big\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid 2p + 3q = n\big\}$, et $d_n = \mathrm{Card}(D_n)$.

a. Écrire une fonction Python prenant comme argument un entier naturel n et retournant la liste des éléments de l'ensemble D_n.

b. Avec Python, comparer d_n et d_{n+6} pour $n \in [\![0, 184]\!]$. Faire une conjecture.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(1 - x^2)(1 - x^3)}$.

c. Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

d. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ ce développement en série entière. Écrire une fonction en langage Python qui calcule c_n, prenant n comme argument. Calculer c_n pour $n \in [\![0, 199]\!]$.

e. Vérifier expérimentalement la relation $c_n = d_n$, puis la démontrer.

f. En considérant la fonction $g : x \mapsto (1 - x^6)\, f(x) - \dfrac{1}{1 - x}$, prouver la conjecture émise à la question **b.**

g. Représenter sur un même graphique, sur l'intervalle $[0\ ;\ 0,95]$, la fonction f et la somme partielle d'indice 20 de la série entière $\sum c_n x^n$.

UN PROBLÈME

PARTIE A

Soit h une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $[0, a[$ (avec $a > 0$) et vérifiant

$$\forall x \in [0, a[\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad h^{(n)}(x) \geq 0 \ .$$

Pour $x \in [0, a[$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $R_n(x) = h(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{h^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

A.1. Prouver la relation $R_n(x) = x^{n+1} \displaystyle\int_0^1 \frac{(1 - u)^n\, h^{(n+1)}(xu)}{n!}\, du$.

A.2. Pour tout couple (x, y) tel que $0 < x < y < a$ et tout entier naturel n, montrer que

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} R_n(y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^{n+1} h(y) \; .$$

A.3. En déduire que h est la somme de sa série de Taylor sur $[0, a[$.

PARTIE B

Soit g l'application définie sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \tan x$.

B.1.a. Prouver, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et l'unicité d'un polynôme P_n, dont on donnera le degré, tel que

$$\forall x \in I \qquad g^{(n)}(x) = P_n(\tan x) \; .$$

b. Montrer que les coefficients de P_n sont des entiers naturels.

B.2. On note $a_n = g^{(2n+1)}(0)$. On s'intéresse à la série de Taylor de la fonction g, c'est-à-dire la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$; on note $S(x)$ la somme de cette série lorsqu'elle est convergente.

a. Prouver que $\forall x \in I \quad S(x) = \tan x$.

b. Quel est le rayon de convergence de la série entière définissant S ?

PARTIE C

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites réelles $s = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\exists (M, K) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |s_n| \leq M\, K^n \; .$$

C.1. Montrer que $\mathcal{S}$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

C.2. On considère la loi $\otimes$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $a \otimes b = c$ tel que, pour tout n entier naturel, $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

a. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $\otimes$.

b. Déterminer un élément neutre pour la loi $\otimes$ sur $\mathcal{S}$, on le notera e.

C.3.a. Soit $a \in \mathcal{S}$ tel que $a_0 = 1$. Montrer qu'il existe une unique suite $b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $a \otimes b = e$.

b. Soient $M > 0$ et $K > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq M\, K^n$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |b_n| \leq (1 + M)^n\, K^n \; .$$

En déduire que $b \in \mathcal{S}$.

C.4.a. Soit $s \in \mathcal{S}$. Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} s_n x^n$?

b. Inversement, soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} s_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que la suite $s = (s_n)$ appartient à $\mathcal{S}$.

C.5.a. Soit h une fonction développable en série entière sur $]-R, R[$ (avec $R > 0$), et vérifiant $h(0) = 1$. Montrer que la fonction $\dfrac{1}{h}$ est développable en série entière dans un intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$.

b. En déduire (sans utiliser les parties **A** et **B**) que la fonction tangente est développable en série entière dans un voisinage de zéro.