Éléments propres.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, soit l'endomorphisme $\Phi : f \mapsto f''$. Déterminer ses éléments propres.

- -

Soit λ un réel. On recherche les fonctions f vérifiant $f'' = \lambda f$, ce sont donc les solutions de l'équation différentielle $y'' - \lambda y = 0$ (équation linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre). On peut donc affirmer (*cours de première année*) que tout réel λ est valeur propre de Φ, et que les sous-espaces propres $E_\lambda(\Phi) = \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ sont tous de dimension deux. Plus précisément,

• pour $\lambda = 0$, le sous-espace propre $E_0(\Phi) = \mathrm{Ker}\,\Phi$ est constitué des fonctions affines $x \mapsto Ax + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$;

• pour $\lambda > 0$, posons $\omega = \sqrt{\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' - \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\ \mathrm{ch}(\omega x) + B\ \mathrm{sh}(\omega x)\ , \quad \text{ou encore} \qquad x \mapsto a\,e^{\omega x} + b\,e^{-\omega x}\ ,$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ ou $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

• pour $\lambda < 0$, posons $\omega = \sqrt{-\lambda}$, le sous-espace propre $E_\lambda(\Phi)$ est constitué des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$, ce sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto A\ \cos(\omega x) + B\ \sin(\omega x)\ , \quad \text{avec} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2\ .$$

---

2. Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a. Montrer que, si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est valeur propre de $u \circ v$, alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

b. Si E est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Sp}(v \circ u) = \mathrm{Sp}(u \circ v)$.

c. Si E est de dimension infinie, montrer que 0 peut être valeur propre de $u \circ v$ sans être valeur propre de $v \circ u$. *On pourra, dans $E = \mathbb{K}[X]$, considérer l'opérateur de dérivation $D : P \mapsto P'$ et un "opérateur de primitivation" $\Phi : P \mapsto \int_0^X P(t)\,\mathrm{d}t$.*

- -

a. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ une valeur propre **non nulle** de $u \circ v$, il existe alors un vecteur x **non nul** de E tel que $u \circ v(x) = \lambda x$. En appliquant v, on obtient $v \circ u \circ v(x) = \lambda\, v(x)$, soit $(v \circ u)\big(v(x)\big) = \lambda\, v(x)$. Or, le vecteur $v(x)$ est **non nul** : en effet, si on avait $v(x) = 0_E$, cela entraînerait $\lambda x = u\big(v(x)\big) = 0_E$ donc $x = 0_E$ puisque λ est non nul, et c'est absurde. Le scalaire λ est donc aussi valeur propre de $v \circ u$, le vecteur **non nul** $v(x)$ étant un vecteur propre associé.

b. En dimension finie, on peut utiliser les déterminants. Rappelons que le spectre est alors l'ensemble des valeurs propres (*faux en dimension infinie*). Si λ est un scalaire non nul, il appartient à $\mathrm{Sp}(u \circ v)$ si et seulement s'il appartient à $\mathrm{Sp}(v \circ u)$ d'après la question **a.** Il reste à étudier le cas $\lambda = 0$, mais rappelons que 0 est valeur propre d'un endomorphisme si et seulement si cet endomorphisme est non injectif, c'est-à-dire (en dimension finie) de déterminant nul. Donc

$$0 \in \mathrm{Sp}(u \circ v) \iff \det(u \circ v) = 0 \iff \det(u)\det(v) = 0 \iff \det(v \circ u) = 0 \iff 0 \in \mathrm{Sp}(v \circ u)\ .$$

c. Considérons les endomorphismes D et Φ de $\mathbb{R}[X]$ aimablement prêtés par l'énoncé. Notons d'abord que, si P est un polynôme, $\Phi(P)$ est la "primitive formelle" de P qui s'annule en zéro, autrement dit si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $\Phi(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \dfrac{X^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{d+1} \dfrac{a_{k-1}}{k} X^k$.

Il est immédiat de vérifier que, pour tout polynôme P, on a $D\big(\Phi(P)\big) = P$, donc $D\circ\Phi = \mathrm{id}_E$ et l'endomorphisme $D \circ \Phi$ est injectif et n'admet donc pas 0 pour valeur propre.

Par contre, pour tout polynôme P, on a $\Phi\big(D(P)\big) = P - P(0)$: si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, alors $\Phi\big(D(P)\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^k = P - a_0$; ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi\circ D)$ est l'ensemble $\mathbb{K}_0[X] \simeq \mathbb{K}$ des polynômes constants et l'endomorphisme $\Phi \circ D$ n'est pas injectif donc admet 0 pour valeur propre.

---

3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphsme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par

$$f : P \mapsto (X^2 - 1)\, P'' + 2X\, P' \ .$$

- -

L'endomorphisme f diminue les degrés: on vérifie facilement que $\deg\big(f(P)\big) \leq \deg(P)$ pour tout polynôme P. Il en résulte que, pour tout n entier naturel, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f, et que l'endomorphisme induit f_n est représenté, dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, par une matrice T_n triangulaire supérieure. Explicitons cette matrice T_n, pour cela calculons les images par f des polynômes X^k. On a immédiatement $f(1) = 0$, $f(X) = 2X$ et, pour $k \geq 2$, $f(X^k) = k(k+1)X^k - k(k-1)X^{k-2}$. D'où

$$T_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 6 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix} .$$

Comme T_n est triangulaire, on a

$$\mathrm{Sp}(f_n) = \mathrm{Sp}(T_n) = \big\{0, 2, 6, \cdots, n(n+1)\big\} = \big\{k(k+1)\ ;\ 0 \leq k \leq n\big\} .$$

Enfin, un réel est valeur propre de f si et seulement s'il est valeur propre de f_n pour au moins un entier n (*vérification laissée à l'improbable lecteur*). En conclusion, les valeurs propres de f sont les $k(k+1)$ pour k entier naturel.

---

4. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme f de $E = \mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = (X^2 - 1)P' - nXP$.

- -

Notons d'abord que f et bien un endomorphisme de E: la linéarité est immédiate, et on constate ensuite que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme image $f(X^k)$ est de degré au plus n (il est de degré $k+1$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, et $f(X^n)$ est de degré n grâce à une annihilation des termes de degré $n+1$). Donc f va bien de E dans E.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors λ est valeur propre de f si et seulement s'il existe un polynôme P non nul, de degré au plus n, tel que $f(P) = \lambda P$, donc si et seulement si l'équation différentielle

(E_λ) : $\quad (x^2-1)\,y' - (nx+\lambda)\,y = 0$ admet une solution polynomiale non nulle de degré au plus n. Résolvons cette équation sur l'un des intervalles $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ sur lesquels il est possible de la mettre sous sa “forme normale” $y' = \dfrac{nx+\lambda}{x^2-1}\,y$. Après une décomposition en éléments simples, on a

$$(E_\lambda) \iff y' = \left(\frac{n+\lambda}{2}\,\frac{1}{x-1} + \frac{n-\lambda}{2}\,\frac{1}{x+1}\right) y\ ,$$

ce qui se résout en

$$y = C\,|x-1|^{\frac{n+\lambda}{2}}\,|x+1|^{\frac{n-\lambda}{2}}\ .$$

Les fonctions obtenues sont polynomiales de degré au plus n (en fait, si elles sont polynomiales, elles sont de degré n exactement) sur les intervalles considérés si et seulement si les exposants $\dfrac{n+\lambda}{2}$ et $\dfrac{n-\lambda}{2}$ sont des entiers naturels de l'intervalle $[\![0,n]\!]$. On en déduit que λ est nécessairement de la forme $2k-n$ avec $k \in [\![0,n]\!]$. Pour un tel λ, on s'aperçoit alors que le polynôme $P = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$ est un vecteur propre associé. On a obtenu $n+1$ valeurs propres distinctes, il ne peut y en avoir d'autres puisque $\dim(E) = n+1$.

Bilan. $\mathrm{Sp}(f) = \big\{2k-n\ ;\ 0 \le k \le n\big\}$ et $E_{2k-n}(f) = \mathrm{Vect}\,\big((X-1)^k(X+1)^{n-k}\big)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, les sous-espaces propres sont des droites vectorielles. *On peut alors affirmer que f est diagonalisable puisqu'on a construit une base de vecteurs propres, ou bien puisqu'il a $n+1$ valeurs propres distinctes en dimension $n+1$.*

---

5. Soit f l'endomorphisme de l'espace vectoriel $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ défini par $f(u) = v$ avec

$$v_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{u_{n-1}+u_n}{2}\ .$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

\- -

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, discutons l'équation $f(u) = \lambda u$ avec $u \in E$. Elle se traduit par
$$\begin{cases} \qquad\qquad u_0 = \lambda u_0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dfrac{u_{n-1}+u_n}{2} = \lambda u_n \end{cases}.$$

• si $\lambda = 1$, on peut choisir u_0 quelconque, la deuxième condition se traduit alors par $u_{n-1} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les solutions de l'équation $f(u) = u$ sont les suites constantes (qui forment un s.e.v. de dimension 1) ;

• si $\lambda \neq 1$, la première condition impose $u_0 = 0$, la deuxième donne $(2\lambda-1)u_n = u_{n-1}$, d'où deux sous-cas:

- ▷ si $\lambda = \dfrac{1}{2}$, alors $u_{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la seule solution est la suite nulle ;
- ▷ si $\lambda \neq \dfrac{1}{2}$, alors $u_n = \dfrac{u_{n-1}}{2\lambda-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et partant de $u_0 = 0$, on obtient aussi que u est la suite nulle.

Finalement, la seule valeur propre de l'endomorphisme f est 1, et le sous-espace propre associé est la droite vectorielle constituée des suites constantes.

6.a. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice canoniquement associée. Soit par ailleurs H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ d'équation cartésienne $v_1 x_1 + \cdots + v_n x_n = 0$, avec $v_1, \cdots, v_n$ scalaires non tous nuls. Montrer que H est stable par u si et seulement le vecteur $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice $A^\top$.

b. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par u.

- -

a. Posons $W = A^\top V = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$. On notera qu'un vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{K}^n$ appartient à H si et seulement si on a $V^\top X = 0$.

• Supposons V vecteur propre de $A^\top$, alors il existe un scalaire λ tel que $A^\top V = \lambda V$, donc en transposant $V^\top A = \lambda V^\top$. Si X appartient à H, on a alors $V^\top X = 0$, d'où $V^\top(AX) = (V^\top A)X = \lambda V^\top X = 0$, ce qui signifie que le vecteur AX est aussi dans H. Ainsi, H est stable par la matrice A ou, ce qui revient au même, par l'endomorphisme u.

• Supposons H stable par u. Ainsi, pour tout vecteur X de H, on a $AX \in H$, c'est-à-dire $V^\top AX = 0$, soit encore $W^\top X = 0$. Autrement dit, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de H vérifie l'équation cartésienne $w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = 0$. Deux cas se présentent alors:
- si $W = 0$, i.e. si tous les coefficients w_i sont nuls, alors $V \in \mathrm{Ker}(A^\top)$, donc V est bien vecteur propre de $A^\top$ (pour la valeur propre 0) ;
- si les w_i ne sont pas tous nuls, l'hyperplan H' d'équation cartésienne $w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n = 0$ est confondu avec H (on a vu ci-dessus que $H \subset H'$ et ils ont la même dimension car ce sont des hyperplans). Mais deux équations linéaires définissant le même hyperplan sont proportionnelles (*résultat du cours que l'on peut aussi énoncer sous la forme: deux formes linéaires non nulles ayant le même noyau sont proportionnelles*), il en résulte qu'il existe un scalaire λ (alors non nul) tel que $W = \lambda V$, i.e. $A^\top V = \lambda V$, ce qu'il fallait démontrer.

b. Il y a déjà deux s.e.v. triviaux qui sont stables par u, ce sont:

- le s.e.v. $\{0_E\}$, de dimension 0 ;

- l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier, de dimension 3.

Les droites vectorielles stables (dimension 1) sont celles dirigées par des vecteurs propres, recherchons donc ces derniers. Un petit calcul, laissé à l'estimable lecteur, montre que $\chi_A = (X-2)(X^2 - 2X + 2)$, donc la seule valeur propre **réelle** de la matrice A (i.e. la seule valeur propre de l'endomorphisme u) est $\lambda = 2$. Le sous-espace propre est la droite vectorielle D engendrée par le vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cette droite D est alors l'unique droite vectorielle stable.

En utilisant la question **a.**, on voit que les plans stables sont obtenus en recherchant les vecteurs propres de la matrice $A^\top$. Cette matrice a les mêmes valeurs propres que A, à savoir seulement 2 comme valeur propre réelle, mais le sous-espace propre est la droite engendrée par le vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le seul plan vectoriel stable par u est alors celui d'équation cartésienne $V^\top X = 0$, i.e. $y + z = 0$.

---

7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice **strictement stochastique**, i.e. telle que

$$\begin{aligned} &\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad a_{i,j} > 0\ ; \\ &\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1\ . \end{aligned}$$

a. Montrer que 1 est valeur propre de A.

b. Montrer que $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \quad |\lambda| \leq 1$.

c*. Montrer que, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ est de module 1, alors $\lambda = 1$.

- -

a. La relation $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$ signifie que $AV = V$, avec $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, donc le nombre 1 est valeur propre de A, et V est un vecteur propre associé.

b. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associée, posons $\|X\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Alors $\|X\|_\infty > 0$ puisque X n'est pas le vecteur nul. Comme $AX = \lambda X$, on a, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la relation $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j = \lambda x_i$. Donc

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad |\lambda|\,|x_i| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \left| a_{i,j}\, x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\, \|X\|_\infty = \|X\|_\infty\ .$$

Cette majoration étant vraie pour tout indice i, elle "passe au sup", i.e. $|\lambda|\,\|X\|_\infty \leq \|X\|_\infty$. Comme $\|X\|_\infty > 0$, on déduit $|\lambda| \leq 1$.

c. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ de module 1, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$ un vecteur propre associé. Soit $s \in [\![1,n]\!]$ un indice tel que $|x_s| = \|X\|_\infty$. On a, d'après **a.**, la relation

$$|x_s| = \left| \sum_{j=1}^{n} a_{s,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{s,j}\, |x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{s,j}\, \|X\|_\infty = \|X\|_\infty = |x_s|\ .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité à chaque intermédiaire.

De $\sum_{j=1}^{n} a_{s,j}\, |x_j| = \sum_{j=1}^{n} a_{s,j} \|X\|_\infty$, que l'on peut écrire aussi $\sum_{j=1}^{n} a_{s,j} \big(\|X\|_\infty - |x_j| \big) = 0$, on déduit d'abord que chaque terme de cette dernière somme est nul (c'est une somme de termes positifs qui est nulle) et, les coefficients de la matrice A étant tous non nuls, on déduit ensuite que $|x_j| = \|X\|_\infty = |x_s|$ pour tout j.

Ensuite, de $\left|\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{s,j}x_j\right| = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{s,j}\,x_j|$, on déduit que les nombres complexes $a_{s,j}x_j$ sont positivement liés (cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire), i.e. ils ont le même argument (ils sont tous non nuls) donc il existe un réel θ tel que $x_j = e^{i\theta}|x_j|$ pour tout j. Finalement, $x_j = e^{i\theta}\|X\|_\infty$ pour tout j, ce qui signifie que $X = e^{i\theta}\|X\|_\infty V$, où V est le vecteur-colonne introduit en **a.** Comme $AV = V$, on déduit que $AX = X$, puis que $\lambda = 1$.

Remarque. Cette démonstration prouve aussi que $E_1(A) = \mathrm{Vect}(V)$.

---

8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, soit $v \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec u. On pose $f = u + v$. Montrer que f et v ont les mêmes valeurs propres.

- -

• Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de v, alors il existe $x \in E$, non nul, tel que $v(x) = \lambda x$. Comme u est nilpotent, l'ensemble $\big\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j(x) = 0_E\big\}$ est une partie non vide, elle admet alors un minimum k, on a alors $u^{k-1}(x) \neq 0_E$ et $u^k(x) = 0_E$.

Attention. Cet entier k n'est pas forcément l'**indice de nilpotence** de u défini par $p = \min\{j \in \mathbb{N}^* \mid u^j = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$. On a seulement $k \leq p$ en général.

En posant $y = u^{k-1}(x)$, on alors $u(y) = 0_E$ et on dispose d'un vecteur y **non nul** tel que

$$f(y) = v(y) = v\big(u^{k-1}(x)\big) = u^{k-1}\big(v(x)\big) = u^{k-1}(\lambda x) = \lambda u^{k-1}(x) = \lambda y$$

(en effet, si v commute avec u, il commute aussi avec u^{k-1}, c'est une récurrence immédiate). Donc λ est aussi valeur propre de f.

• Comme $v = (-u) + f$ avec $-u$ nilpotent, les endomorphismes $-u$ et f commutant puisque $(-u) \circ f = -u \circ (u + v) = -u^2 - u \circ v = -u^2 - v \circ u = f \circ (-u)$, on peut dire que f et v jouent des rôles symétriques, il est donc inutile de rédiger une réciproque: toute valeur propre de f est donc aussi valeur propre de v.

Polynôme caractéristique.

9. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 3 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ admet une unique valeur propre réelle strictement positive.

- -

Le lecteur instruit et perspicace aura remarqué que A est une "matrice-compagnon" .

Pour calculer son polynôme caractéristique $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ -3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$, on peut effectuer l'opération élémentaire $L_n \leftarrow L_n + xL_{n-1} + x^2 L_{n-2} + \cdots + x^{n-1} L_1$, puis développer par rapport à la dernière ligne ; on obtient $\chi_A(x) = x^n - \big(x^{n-1} + 2x^{n-2} + \cdots + (n-1)x + n\big)$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire $\chi_A(x) = x^n\, f(x)$, avec

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \cdots + \frac{n-1}{x^{n-1}} + \frac{n}{x^n}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{x^k}\ .$$

Il est immédiat que la fonction f a une dérivée strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$, donc f établit une bijection (dérivable strictement croissante) de $\mathbb{R}_+^*$ vers $]-\infty, 1[$. Il existe donc un unique réel strictement positif α tel que $f(\alpha) = 0$, c'est-à-dire tel que $\chi_A(\alpha) = 0$, et la matrice A admet donc pour seule valeur propre réelle strictement positive ce nombre α.

---

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible, soit $B = A^{-1}$. Quelle relation y a-t-il entre les polynômes caractéristiques χ_A et χ_B ?

- -

Pour $x \in \mathbb{K}$ non nul, on écrit

$$\begin{aligned} \chi_B(x) &= \det(xI_n - A^{-1}) = \det\left[A^{-1}(xA - I_n)\right] = \det(A^{-1}) \cdot x^n \cdot \det\left(A - \frac{1}{x}\, I_n\right) \\ &= \frac{x^n}{\det(A)}\, (-1)^n\, \det\left(\frac{1}{x}\, I_n - A\right) = \frac{(-1)^n\, x^n}{\det(A)}\, \chi_A\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{x^n}{\chi_A(0)}\, \chi_A\Big(\frac{1}{x}\Big)\ . \end{aligned}$$

Bien sûr, $\chi_B(0) = (-1)^n\, \det(A^{-1}) = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)} = \dfrac{1}{\chi_A(0)}$.

Autrement dit, si $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, avec $a_0 = \chi_A(0) = (-1)^n \det(A)$ qui est non nul, alors

$$\chi_B = \frac{1}{a_0}\, \big(a_0 X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1}X + 1\big)\ .$$

---

11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique χ_f à l'aide de $\mathrm{tr}(f)$ et $\mathrm{tr}(f^2)$.

- -

Si $\mathrm{rg}(f) = 2$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension $n-2$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E adaptée à $\mathrm{Ker}(f)$, alors la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0_{n-2} & B \\ 0_{2,n-2} & A \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, i.e. les $n-2$ premières colonnes sont nulles. Posons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\chi_f(x) = \chi_M(x) = x^{n-2}\, \chi_A(x)$. Or, $\chi_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}(A)\, x + \det(A)$, et on vérifie que

$$\det(A) = ad - bc = \frac{1}{2}\Big((a+d)^2 - (a^2 + 2bc + d^2)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}(A)^2 - \mathrm{tr}(A^2)\Big)\ .$$

Comme, par ailleurs, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(f)$ et $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(f^2)$ - cette dernière relation par exemple puisque $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & BA \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}$ avec des blocs de même format que ci-dessus - on conclut que

$$\chi_f = X^{n-2}\left(X^2 - \mathrm{tr}(f)\,X + \frac{1}{2}\Big(\mathrm{tr}(f)^2 - \mathrm{tr}(f^2)\Big)\right)\ .$$

---

12. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient les matrices $M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & I_n \end{pmatrix}$, $M'' = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ -B & \lambda I_n \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$. En effectuant les produits matriciels MM' et $M''M$, montrer que les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

- -

On calcule $MM' = \begin{pmatrix} \lambda I_n - AB & A \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ et $M''M = \begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ 0_n & \lambda I_n - BA \end{pmatrix}$.

Les deux étant triangulaires supérieures par blocs, on déduit les relations

$$\det(MM') = \det(\lambda I_n - AB) = \chi_{AB}(\lambda)\ ,$$

$$\det(M''M) = \det(\lambda I_n)\ \det(\lambda I_n - BA) = \lambda^n\ \chi_{BA}(\lambda)\ .$$

Mais on a aussi $\det(MM') = \det(M)\ \det(M') = \det(M)$ et

$$\det(M''M) = \det(M'')\ \det(M) = \lambda^n\ \det(M) = \lambda^n\ \det(MM')\ .$$

On en déduit que $\lambda^n\ \chi_{BA}(\lambda) = \lambda^n\ \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout scalaire λ, et donc que $\chi_{BA}(\lambda) = \chi_{AB}(\lambda)$ pour tout λ scalaire **non nul**. Les fonctions polynomiales χ_{AB} et χ_{BA} coïncident en une infinité de points, on conclut que $\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

Diagonalisation (pratique).

13. Sans écrire aucun calcul, déterminer les éléments propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 8 & -12 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$.

- -

La matrice A est visiblement de rang 1, donc le nombre 0 est valeur propre et le sous-espace propre associé $E_0(A) = \mathrm{Ker}\,A$ est de dimension 2 (théorème du rang) : on voit par ailleurs que ce sous-espace est le plan d'équation cartésienne $x + 2y - 3z = 0$, une base est par exemple constituée des deux vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si A admet une autre valeur propre $\lambda \neq 0$, un vecteur propre associé appartient nécessairement à $\operatorname{Im} A$. Or, $\operatorname{Im} A$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, et on vérifie que $AX_3 = 15X_3$, donc 15 est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est $E_{15}(A) = \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Vect}(X_3)$. *On pouvait aussi utiliser la trace.*

En conclusion, $\operatorname{Sp}(A) = \{0 \ ; \ 15\}$, la matrice A est diagonalisable, on a par exemple

$$A = PDP^{-1} \ , \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

---

14. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

- -

La matrice A est triangulaire inférieure, on lit donc immédiatement ses valeurs propres : $\operatorname{Sp}(A) = \{1 \ ; \ 4 \ ; \ 9\}$. Comme elle a trois valeurs propres distinctes, on peut affirmer qu'elle est diagonalisable et que ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles. En notant (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$, on a immédiatement $E_1(A) = \operatorname{Vect}(e_3)$ et $E_4(A) = \operatorname{Vect}(e_2)$. En résolvant le système $AX = 9X$, on a facilement $E_9(A) = \operatorname{Vect}(e_1 - e_2 - e_3)$. On en déduit la diagonalisation de la matrice A, soit $A = PDP^{-1}$, avec par exemple $P = \operatorname{diag}(9, 4, 1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit M une matrice telle que $M^2 = A$. En notant m et a les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associés aux matrices A et M respectivement, on a $m^2 = a$, ce qui entraîne que les endomorphismes a et m commutent ($a \circ m = m \circ a = m^3$), donc m laisse stables les sous-espaces propres de a, à savoir les trois droites vectorielles énumérées ci-dessus ; cela revient aussi à dire que les vecteurs $e_1 - e_2 - e_3$, e_2 et e_3 sont aussi vecteurs propres de m ; cela revient encore à dire que la matrice M est diagonalisable avec la même matrice de passage P (autrement dit dans la même base que la matrice A), on a donc nécessairement $M = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ est une matrice diagonale. Réciproquement, une telle matrice M (de la forme $P\Delta P^{-1}$) vérifie $M^2 = A$ si et seulement si $\Delta^2 = D$, autrement dit **ssi** $\alpha^2 = 9$, $\beta^2 = 4$, $\gamma^2 = 1$. Il y a donc exactement huit (2^3) matrices M solutions du problème posé : ce sont les matrices $M = P\Delta P^{-1}$, avec $\Delta = \operatorname{diag}(3\varepsilon, 2\varepsilon', \varepsilon'')$, avec $(\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'') \in \{-1 \ ; \ 1\}^3$. Pour les amateurs de calculs explicites, on obtient les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et leurs opposées (s'il n'y a pas d'erreur... *mais qui ira vérifier ?*).

---

15. Rechercher toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = J$, avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra exploiter le fait qu'une telle matrice M commute nécessairement avec J.

- -

Commençons par diagonaliser J (le détail des calculs est laissé au lecteur) : $J = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Si une matrice M vérifie $M^2 + M = J$, alors elle commute avec J, donc les sous-espaces propres de J, c'est-à-dire les droites vectorielles $E_0(J) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $E_2(J) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont stables par M, ce qui signifie que ces deux vecteurs sont vecteurs propres de M, donc M est diagonalisable à l'aide de la même matrice de passage P. On a donc $M = P\Delta P^{-1}$, où Δ est diagonale : $\Delta = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$. La relation $M^2 + M = J$ se ramène alors à $\Delta^2 + \Delta = D$, soit encore à $\begin{cases} \alpha^2 + \alpha = 0 \\ \beta^2 + \beta = 2 \end{cases}$. Il y a quatre couples (α, β) solutions, à savoir $(0,1)$, $(0,-2)$, $(-1,1)$ et $(-1,-2)$, auxquels correspondent respectivement les quatre matrices M solutions du problème :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

---

16. Soient $n+1$ nombres complexes distincts $x_0, \cdots, x_n$, soit le polynôme $B = \prod_{k=0}^{n}(X - x_k)$. Soit d'autre part $A \in \mathbb{C}_n[X]$ un polynôme. On considère l'application φ qui, à tout polynôme P de $\mathbb{C}_n[X]$, associe le reste de la division euclidienne du polynôme AP par B.

a. Montrer que φ peut être considéré comme un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

b. On note $(L_0, \cdots, L_n)$ la base de Lagrange associée aux points d'interpolation $x_0, \cdots, x_n$. Calculer $\varphi(L_k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. En déduire que l'endomorphisme φ est diagonalisable.

- -

a. L'application φ va bien de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ puisque le reste de la division euclidienne considérée doit être de degré strictement inférieur à $\deg(B) = n+1$. Montrons sa linéarité: soient $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$, $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, il existe alors un unique couple $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_1 = BQ_1 + R_1$, et aussi un unique couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tel que $AP_2 = BQ_2 + R_2$. On a alors $R_1 = \varphi(P_1)$ et $R_2 = \varphi(P_2)$. De ces relations, on déduit que $A(\lambda P_1 + P_2) = B(\lambda Q_1 + Q_2) + (\lambda R_1 + R_2)$ et, comme $\deg(\lambda R_1 + R_2) \leq \max\big\{\deg(R_1), \deg(R_2)\big\} < n+1$, on peut affirmer que $\lambda R_1 + R_2 = \varphi(\lambda P_1 + P_2)$, soit $\varphi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\,\varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.

b. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons $M_k = \varphi(L_k)$, on a alors $AL_k = BQ_k + M_k$ où Q_k est un polynôme. En évaluant en un x_j, comme $B(x_j)$ est nul, on obtient

$$M_k(x_j) = A(x_j)\,L_k(x_j) = \delta_{j,k}\,A(x_j) = A(x_k)\,\delta_{j,k} = A(x_k)\,L_k(x_j)\ .$$

Or, un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$ est entièrement déterminé par ses valeurs en les $n+1$ points x_j $(0 \leq j \leq n)$. On en déduit que $\varphi(L_k) = M_k = A(x_k)\,L_k$, donc le polynôme L_k est vecteur propre de l'endomorphisme φ associé à la valeur propre $A(x_k)$. Comme $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$, on dispose donc d'une base de $\mathbb{C}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de φ, donc φ est diagonalisable.

---

17. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, soient a et b deux réels distincts. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X-a)(X-b)P' - nXP\ .$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E, et qu'il est diagonalisable.

- -

La linéarité de φ est immédiate. De plus, soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

- si $\deg(P) = d < n$, alors $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq d+1 \leq n$, donc $\varphi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$;

- on calcule $\varphi(X^n) = n(X-a)(X-b)X^{n-1} - n\,X^{n+1}$, qui est de degré au plus n en constatant l'annihilation des termes en X^{n+1} ;

on déduit de tout cela que φ va bien de E dans E.

Dans la base $\mathcal{B} = \big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$, la matrice de φ est assez facile à écrire: en effet, après calculs, on a

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \qquad \varphi\big((X-a)^k\big) = (k-n)\,(X-a)^{k+1} + \big(k(a-b) - na\big)\,(X-a)^k\ ,$$

ce qui montre que la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire inférieure, avec pour coefficients diagonaux les réels $k(a-b) - na$, $0 \leq k \leq n$, qui sont tous distincts. Donc φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes avec $\dim(E) = n+1$, donc φ est diagonalisable.

---

18. Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit P_n son polynôme caractéristique.

a. Calculer P_1 et P_2. Pour $n \geq 3$, exprimer P_n en fonction de P_{n-1} et P_{n-2}.

b. Soit $x \in]-2, 2[$. Montrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\ , \quad \text{avec} \qquad \alpha = \mathrm{Arccos}\left(\frac{x}{2}\right)\ .$$

c. En déduire que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- -

a. On a $A_1 = (\,0\,)$ et $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - 1$.

Un développement par rapport à la première colonne, puis un développement par rapport à la première ligne dans l'un des déterminants d'ordre $n-1$ obtenus donne

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & (0) \\ -1 & x & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & x \end{vmatrix} = x\,P_{n-1}(x) - P_{n-2}(x)\ .$$

b. Puisque la réponse est donnée, contentons-nous de la vérifier par récurrence double: en posant donc $x = 2\cos(\alpha)$ avec $\alpha \in]0,\pi[$, on a bien

$$P_1(x) = x = 2\ \cos(\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha)}\ ;$$

$$P_2(x) = x^2 - 1 = 4\ \cos^2(\alpha) - 1 = \frac{\sin(3\alpha)}{\sin(\alpha)}\ .$$

En effet,

$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\ \cos(\alpha) + \cos(2\alpha)\ \sin(\alpha) \\ &= 2\ \sin(\alpha)\ \cos^2(\alpha) + \big(2\ \cos^2(\alpha) - 1\big)\ \sin(\alpha) \\ &= \big(4\ \cos^2(\alpha) - 1\big)\ \sin(\alpha)\ . \end{aligned}$$

Et enfin, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned} 2\ \cos(\alpha)\ \frac{\sin(n\alpha)}{\sin(\alpha)} + \frac{\sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} &= \frac{2\ \cos(\alpha)\ \sin(n\alpha) + \sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big) - \sin\big((n-1)\alpha\big) - \sin\big((n-1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)} \\ &= \frac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\ . \end{aligned}$$

La suite $\big(P_n(x)\big)_{n\geq 1}$ et la suite $\left(\dfrac{\sin\big((n+1)\alpha\big)}{\sin(\alpha)}\right)_{n\geq 1}$, ayant les mêmes deux premiers termes et vérifiant la même relation de récurrence double, coïncident donc.

c. Pour $k \in [\![1,n]\!]$, posons $\alpha_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $x_k = 2\cos(\alpha_k) = 2\ \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$. On observe que

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad P_n(x_k) = \frac{\sin\big((n+1)\alpha_k\big)}{\sin(\alpha_k)} = \frac{\sin(k\pi)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)} = 0\ .$$

Les réels x_k sont tous distincts car la fonction cosinus est strictement décroissante (donc injective) sur l'intervalle $[0,\pi]$. On a donc trouvé n valeurs propres distinctes de la matrice A, on sait donc qu'il n'y en a pas d'autres, et que A est diagonalisable avec

$$\mathrm{Sp}(A) = \left\{2\ \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)\ ;\ 1 \leq k \leq n\right\}\ .$$

Les grincheux et les handicapés de la trigo pourront me faire observer que, s'il s'agissait simplement de montrer que A est diagonalisable, on pouvait se contenter de dire qu'elle est *symétrique réelle. Ici, en prime, on a obtenu les valeurs propres. Cela valait bien un peu de calcul, non ?*

---

19. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Combien y a-t-il de matrices M telles que $M^2 = A$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$? Et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

- -

En commençant par la règle de Sarrus (même si cépabô), on obtient

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2) - 9(x-1) - (x-1) \\ &= (x-1)\left[(x-1)(x+2) - 10\right] = (x-1)(x^2+x-12) \\ &= (x-1)(x-3)(x+4) \;. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-4, 1, 3\}$. La matrice A admet trois valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, peu importe, le polynôme caractéristique étant scindé sur $\mathbb{R}$). On a $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(-4, 1, 3)$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ qu'il n'est pas utile d'expliciter. Si une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ vérifie $M^2 = A$, alors elle commute avec A, donc laisse stables les trois sous-espaces propres de la matrice A qui sont des droites vectorielles, ce qui entraîne que M est diagonalisable avec la même matrice de passage P, i.e. $M = P\Delta P^{-1}$ avec Δ diagonale. *En effet, notons $\mathcal{B} = (U, V, W)$ une base de $\mathbb{K}^3$ constituée de vecteurs propres de A, l'endomorphisme f canoniquement associé à la matrice M doit laisser stables les trois droites vectorielles* $\mathrm{Vect}(U)$, $\mathrm{Vect}(V)$, $\mathrm{Vect}(W)$*, donc doit aussi admettre U, V, W comme vecteurs propres, et donc doit être représenté dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale.* L'équation $M^2 = A$ se ramène alors à $\Delta^2 = D$ avec $\Delta = \mathrm{diag}(a, b, c)$ diagonale. Cette dernière équation se ramène enfn au système $\begin{cases} a^2 = -4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 3 \end{cases}$, qui n'a aucune solution si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,et qui en a huit si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En remultipliant par les matrices de passage P et P^{-1}, on obtient 8 matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $M^2 = A$, et aucune dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

---

20. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A est diagonalisable.

b. Montrer qu'il existe une infinité de matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $R^2 = A$.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. Montrer que R est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- -

a. On calcule $\chi_A(x) = (x-2)^2(x-4)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 4\}$, avec 2 valeur propre double, et 4 valeur propre simple. On constate ensuite que $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1, donc par le théorème du rang, le sous-espace propre $E_2(A)$ est de dimension deux. Cela suffit pour affirmer que A est diagonalisable.

On peut bien sûr achever la diagonalisation : $A = PDP^{-1}$, avec par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(2,2,4) = \begin{pmatrix} 2I_2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, calculs laissés au lecteur.

b. La matrice I_2 admet dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ une infinité de "racines carrées", à savoir toutes les matrices de symétries, en particulier les matrices représentant (en b.o.n.) une réflexion par rapport à un axe du plan euclidien, c'est-à-dire les matrices orthogonales indirectes, de la forme $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$. Par un calcul par blocs immédiat, les matrices $M(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $M(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t & \sqrt{2}\sin t & 0 \\ \sqrt{2}\sin t & -\sqrt{2}\cos t & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ vérifient $M(t)^2 = D$, où $D = \mathrm{diag}(2,2,4)$. Enfin, les matrices $R(t) = P\,M(t)\,P^{-1}$, avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient

$$R(t)^2 = P\,M(t)^2\,P^{-1} = P\,D\,P^{-1} = A\ ,$$

et il y a bien une infinité de telles matrices distinctes.

c. Soit $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. La matrice A est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{2; 4\}$, donc elle admet pour polynôme annulateur $\prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda) = (X-2)(X-4)$, autrement dit

$$0 = (A - 2I_3)(A - 4I_3) = (R^2 - 2I_3)(R^2 - 4I_3) = (R - \sqrt{2}I_3)(R + \sqrt{2}I_3)(R - 2I_3)(R + 2I_3)\ ,$$

donc R admet un polynôme annulateur scindé à racines simples, le polynôme $F = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})(X - 2)(X + 2)$, donc R est diagonalisable.

---

21. Soit a un réel, soit la matrice $L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \vdots & & (0) & \\ 1 & & & \\ a & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. À quelle condition sur le réel a la matrice L est-elle diagonalisable ?

b. Calculer les puissances de L.

- -

a. La matrice L est triangulaire inférieure, donc ses valeurs propres et leurs multiplicités se lisent sur la diagonale, on a donc $\mathrm{Sp}(L) = \{0, 1\}$, avec $m_0 = n - 2$ et $m_1 = 2$ (multiplicités). Par ailleurs, $\mathrm{rg}(L) = 2$ visiblement, donc le sous-espace propre $E_0(L) = \mathrm{Ker}(L)$ est de dimension $n - 2$ dans tous les cas. Pour déterminer la dimension du sous-espace propre $E_1(L)$, observons la matrice $M = L - I_n = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & -1 & & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & & \\ 1 & 0 & (0) & -1 & \\ a & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Les opérations élémentaires $C_1 \leftarrow C_1 + \displaystyle\sum_{j=2}^{n-1} C_j$ puis $L_n \leftarrow L_n + \displaystyle\sum_{i=2}^{n-1} L_i$ transforment M en une matrice M' puis en une matrice M'' toutes de même rang, avec $M' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & -1 & & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & & \\ 0 & 0 & (0) & -1 & \\ a+n-2 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

et $M'' = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 0 & -1 & & (0) & \\ \vdots & (0) & \ddots & & \\ 0 & 0 & (0) & -1 & \\ a+n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est maintenant visible que

- si $a = 2-n$, alors $\mathrm{rg}(L - I_n) = \mathrm{rg}(M'') = n-2$, donc $\dim E_1(L) = 2$ et L est diagonalisable ;

- si $a \neq 2-n$, alors $\mathrm{rg}(L - I_n) = \mathrm{rg}(M'') = n-1$, donc $\dim E_1(L) = 1$ et L n'est pas diagonalisable.

Remarque. Ayant constaté que $\mathrm{Sp}(L) = \{0, 1\}$, on peut aussi dire que A est diagonalisable si et seulement si elle admet $X(X-1)$ comme polynôme annulateur, i.e. si et seulement si $L^2 = L$, ce qui donne une conclusion plus rapide et nous rapproche de la question **b.**

b. Notons $L(a)$ la matrice donnée dans l'énoncé pour mettre en valeur sa dépendance vis-à-vis du paramètre a. On fait un petit calcul à la main (*on peut essayer avec les pieds, mais c'est plus dur*), on obtient $L(a)\,L(b) = L(a+b+n-2)$. On a donc $L(a)^2 = L(2a+n-2)$, puis $L(a)^3 = L\big(3a + 2(n-2)\big)$, on conjecture que $L(a)^k = L\big(ka + (k-1)(n-2)\big)$, et on vérifie que la proposition est héréditaire. La relation est valable pour $k \in \mathbb{N}^*$ mais pas pour $k = 0$ puisque, par convention, $L(a)^0 = I_n$.

Diagonalisation (théorie).

22. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad f(M) = AM\ .$$

Montrer que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$, et déterminer les sous-espaces propres de f en fonction de ceux de A. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si A l'est.

- -

• Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$f(M) = \lambda M \iff AM = \lambda M \iff (A - \lambda I_n)\,M = 0 \iff \mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\ .$$

Si le scalaire λ n'est pas valeur propre de A, alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0\}$ et la seule matrice M vérifiant $\mathrm{Im}(M) \subset \{0\}$ est la matrice nulle. On en déduit que λ n'est pas valeur propre de f.

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = E_\lambda(A)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et il existe des matrices M non nulles vérifiant $\mathrm{Im}(M) \subset \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$. *En effet, si V est un vecteur* *non nul appartenant à $E_\lambda(A)$, la matrice carrée M d'ordre n dont toutes les colonnes sont égales à V vérifie* $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}(V) \subset E_\lambda(A)$.

On a ainsi prouvé, par double inclusion, que $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$.

• Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. On vient de montrer qu'une matrice M appartient à $E_\lambda(f)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(M) \subset E_\lambda(A)$, c'est-à-dire si et seulement si les n colonnes de la matrice M appartiennent à $E_\lambda(A)$. L'espace vectoriel $E_\lambda(f)$ est alors "clairement" isomorphe au produit cartésien $\big(E_\lambda(A)\big)^n$, puisque construire une matrice appartenant à $E_\lambda(f)$ revient à choisir ses n vecteurs-colonnes dans l'espace vectoriel $E_\lambda(A)$.

• On déduit de ce qui précède que, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,

$$\dim\big(E_\lambda(f)\big) = \dim\Big(\big(E_\lambda(A)\big)^n\Big) = n\ \dim\big(E_\lambda(A)\big)\ .$$

Comme $\mathrm{Sp}(f) = \mathrm{Sp}(A)$, on a

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) = n \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big)\ .$$

On en déduit les équivalences

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \dim\big(E_\lambda(f)\big) = n^2 \iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n \iff A \text{ est diagonalisable}\ .$$

---

23. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ est également diagonalisable. *On utilisera la diagonalisation de la matrice* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- -

Diagonalisons d'abord $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Cette matrice est de rang 1, donc admet 0 comme valeur propre, le sous-espace propre associé (*i.e.* le noyau) étant manifestement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Par ailleurs, l'image est clairement la droite vectorielle engendrée par le vecteur $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie la relation $JX_2 = 2X_2$, donc ce vecteur est vecteur propre associé à la valeur propre 2. La famille $\mathcal{B} = (X_1, X_2)$ est donc une base de $\mathbb{K}^2$ constituée de vecteurs propres, ce qui permet la diagonalisation : $J = PDP^{-1}$, où $P = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^2$ vers la base $\mathcal{B}$, et $D = \mathrm{diag}(0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On peut aussi expliciter $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. La relation de diagonalisation complètement explicitée est

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\ . \qquad \textbf{(*)}$$

Par ailleurs, la matrice A est supposée diagonalisable : $A = Q\Delta Q^{-1}$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $\Delta \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonale.

Un calcul matriciel par blocs, s'inspirant de la relation **(*)** ci-dessus, montre que

$$\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \\ Q\Delta Q^{-1} & Q\Delta Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix} = M \ ,$$

les matrices $\begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q^{-1} & -Q^{-1} \\ Q^{-1} & Q^{-1} \end{pmatrix}$ étant inverses l'une de l'autre. On a donc $M = RTR^{-1}$ avec $R = \begin{pmatrix} Q & Q \\ -Q & Q \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ et $T = \begin{pmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 2\Delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ diagonale : la matrice M est diagonalisable.

Autre solution. Comme A est diagonalisable, il existe une base $(X_1, \cdots, X_r, X_{r+1}, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{K}^n$ constituée de vecteurs propres de A. Dans l'indexation de cette base, on a noté r le rang de la matrice A et on a choisi de noter $X_1, \cdots, X_r$ des vecteurs propres de A correspondant à des valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ non nulles (non nécessairement distinctes), les $n - r$ vecteurs suivants sont dans le noyau de A, c'est-à-dire sont des vecteurs propres pour la valeur propre 0 (*ceci est bien cohérent puisque, par le théorème du rang, le sous-espace* $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$ *est bien de dimension* $n - r$). Mais la matrice M est aussi de rang r (il y a manifestement autant de colonnes indépendantes dans M que dans A), donc $\mathrm{Ker}(M) = E_0(M)$ est de dimension $2n - r$ par le théorème du rang, notons $(Z_{r+1}, \cdots, Z_{2n})$ une base de $\mathrm{Ker}(M)$ qui est un sous-espace de $\mathbb{K}^{2n}$. On vérifie par un petit calcul par blocs que si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose $Z_i = \begin{pmatrix} X_i \\ X_i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2n}$, alors $MZ_i = 2\lambda_i Z_i$, chaque Z_i est donc vecteur propre de M pour une valeur propre $2\lambda_i$ non nulle. Par ailleurs, il est immédiat de vérifier que les vecteurs $Z_1, \cdots, Z_r$ de $\mathbb{K}^{2n}$ sont linéairement indépendants. Les SEP étant en somme directe, on déduit enfin que la famile $(Z_1, \cdots, Z_r, Z_{r+1}, \cdots, Z_{2n})$ est libre et qu'elle est une base de $\mathbb{K}^{2n}$ constituée de vecteurs propres de M, ce qui permet de conclure que M est diagonalisable.

---

24. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable. Montrer que

$$AB^3 = B^3 A \Longrightarrow AB = BA \ .$$

- -

Écrivons $B = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. La relation $AB^3 = B^3 A$ s'écrit $APD^3P^{-1} = PD^3P^{-1}A$, ou encore $P^{-1}APD^3 = D^3P^{-1}AP$. Posons $P^{-1}AP = R$, de coefficients $r_{i,j}$. La relation obtenue $RD^3 = D^3R$ s'écrit

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad r_{i,j}\,\lambda_j^3 = r_{i,j}\,\lambda_i^3 \ ,$$

soit encore $r_{i,j}(\lambda_j^3 - \lambda_i^3) = 0$ pour tout couple (i, j). On a donc, pour tout couple (i, j),

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j^3 = \lambda_i^3 \ .$$

Mais la fonction $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$, on en déduit que, pour tout couple (i, j),

$$r_{i,j} = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_j = \lambda_i \ ,$$

soit $r_{i,j}(\lambda_j - \lambda_i) = 0$, soit $r_{i,j}\,\lambda_j = r_{i,j}\,\lambda_i$. Donc $RD = DR$. Puis $AB = BA$.

---

25. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.

a. Démontrer la relation $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$.

- -

a. Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, $\mathrm{rg}(u) = 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}\, u) = n-1$, il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dont les $n-1$ premiers vecteurs appartiennent à $\mathrm{Ker}\, u$; dans une telle base, l'endomorphisme u est alors représenté par une matrice M dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles, soit $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$.

La matrice M est alors semblable à A. On vérifie facilement que

$$M^2 = a_n\, M = \mathrm{tr}(M) \cdot M = \mathrm{tr}(A) \cdot M$$

(puisque deux matrices semblables ont la même trace), on en déduit $A^2 = \mathrm{tr}(A) \cdot A$.

b. Le réel 0 est valeur propre de la matrice A (ou de la matrice M, cela revient au même), et le sous-espace propre associé $\mathrm{Ker}\, A$ est de dimension $n-1$. Comme A est semblable à M qui est triangulaire supérieure, les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de M, d'où la discussion :

• si $\mathrm{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et, le seul sous-espace propre étant de dimension $n-1$, la matrice A n'est pas diagonalisable ;

• si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0, a_n\}$, il y a alors un autre sous-espace propre (qui est nécessairement de dimension 1), donc A est diagonalisable.

En conclusion, une matrice de rang un est diagonalisable **si et seulement si** sa trace est non nulle.

c. Reprenons les deux cas mentionnés ci-dessus :

• si $\mathrm{tr}(A) = 0$, i.e. si $a_n = 0$, on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_{n-1})$ et $\mathrm{Im}\, u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1}$ qui appartient donc à $\mathrm{Ker}\, u$, on a donc $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, soit $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Ker}(A)$, et ces deux sous-espaces ne sont pas supplémentaires.

• si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, i.e. si $a_n \neq 0$, alors $\mathrm{Ker}\, u$ est toujours l'hyperplan engendré par les vecteurs e_1, $\cdots$, e_{n-1}, alors que $\mathrm{Im}\, u$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $x = a_1e_1 + \cdots + a_{n-1}e_{n-1} + a_ne_n$ n'appartenant pas à $\mathrm{Ker}\, u$, donc $\mathrm{Im}\, u$ et $\mathrm{Ker}\, u$ sont supplémentaires.

Bilan : Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, matrice de rang 1, on a les équivalences

$$A \text{ diagonalisable} \iff \mathrm{tr}(A) \neq 0 \iff \mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A)\,.$$

---

26. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit u un endomorphisme de E ayant n valeurs propres distinctes.

a. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Montrer que l'endomorphisme $f = P(u)$ est diagonalisable. A-t-il n valeurs propres distinctes?

b. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u. Montrer que tout vecteur propre de u est aussi vecteur propre de v. La réciproque est-elle vraie (tout vecteur propre de v est-il vecteur propre de u) ? Montrer que u et v sont codiagonalisables (i.e. diagonalisables dans une même base).

- -

a. L'endomorphisme u est diagonalisable (propriété de cours, condition suffisante). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E constituée de vecteurs propres de u, soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres associées (distinctes par hypothèse), on a donc $u(e_i) = \lambda_i e_i$, $1 \leq i \leq n$. Un calcul classique, fait en cours, montre alors que $f(e_i) = P(u)(e_i) = P(\lambda_i)\, e_i$. Les vecteurs e_i sont donc aussi vecteurs propres de l'endomorphisme f, mais pour la valeur propre $P(\lambda_i)$. On en déduit que l'endomorphisme $f = P(u)$ est aussi diagonalisable (puisque $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres de f) mais, une fonction polynomiale n'étant pas en général injective, il n'y a aucune raison pour que ses valeurs propres $P(\lambda_i)$ soient distinctes. *Par exemple, si P est un polynôme constant $P = \alpha$, alors $f = \alpha\,\mathrm{id}_E$ est une homothétie et a une seule valeur propre, α.*

b. • On sait que les sous-espaces propres de u sont stables par v. Mais, ces sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont des droites vectorielles. Cela signifie donc qu'elles sont engendrées par un vecteur qui est aussi vecteur propre de v. Reprenons les choses autrement, en réutilisant les notations introduites dans le **a.**: soit x un vecteur propre de u, alors x appartient à l'un des sous-espaces propres de u, mais ces SEP sont les droites vectorielles $E_{\lambda_i}(u) = \mathrm{Vect}(e_i)$, on a donc $x = \alpha\, e_i$ avec $\alpha \in \mathbb{K}^*$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Comme $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v, on a $v(x) \in E_{\lambda_i}(u)$, ce qui signifie que $v(x)$ est colinéaire à e_i, donc $v(x) = \beta e_i$ avec $\beta \in \mathbb{K}$. Donc $v(x) = \dfrac{\beta}{\alpha} x$ est colinéaire à x, ce qui signifie que x est aussi un vecteur propre de v.

• La réciproque est fausse: si on prend par exemple $v = \mathrm{id}_E$, alors v commute avec u, mais tout vecteur de E (non nul, en toute rigueur) est vecteur propre de v, alors qu'ils ne sont pas tous vecteurs propres de u.

• On vient de voir que $\mathcal{B}$ est une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v. Dans cette base, les endomorphismes u et v sont tous deux représentés par des matrices diagonales.

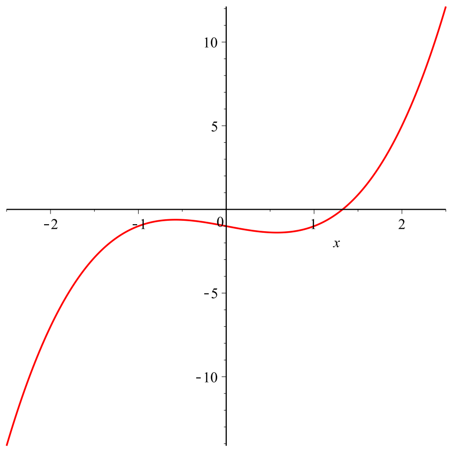
---

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Montrer que $\det(A) > 0$.

- -

On étudie $f : x \mapsto x^3 - x - 1$ sur $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = 3x^2 - 1$, donc f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$, puis strictement croissante sur

$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$. Comme $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2-3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} < 0$, on déduit que f s'annule en un seul réel a, appartenant à l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right[$.



Le polynôme $P = X^3 - X - 1$ est annulateur de la matrice A, et ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$: en effet, il admet une seule racine réelle a, et donc deux autres racines non réelles, qui sont complexes conjuguées (notons-les β et $\overline{\beta}$), et qui sont donc nécessairement distinctes. Donc la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

On a alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \{a, \beta, \overline{\beta}\}$. De plus, les valeurs propres β et $\overline{\beta}$ ont la même multiplicité (car A est à coefficients réels, donc le polynôme caractéristique est aussi à coefficients réels). En notant r la multiplicité de la valeur propre a, et s celle de β, on a alors

$$\det(A) = a^r\ \beta^s\ (\overline{\beta})^s = a^r\ |\beta|^{2s} \in \mathbb{R}_+^*$$

puisque $a > 0$ et $\beta \neq 0$.

---

28. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^\top = I_n$.

a. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

b. Montrer que M est diagonalisable.

- -

a. On observe que $M^2 = I_n - M^\top = (I_n - M)^\top$. On en déduit les équivalences

$$M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff M^2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff I_n - M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \iff 1 \in \mathrm{Sp}(M)\ .$$

b. De la relation $M^2 + M^\top = I_n$, on tire $M^\top = I_n - M^2$ puis, en transposant, $M = I_n - (M^\top)^2$, puis en réinjectant, $\left(I_n - (M^\top)^2\right)^2 + M^\top = I_n$, puis en transposant de nouveau et en simplifiant, $M^4 - 2M^2 + M = 0$. Le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X$ est donc annulateur de la matrice M. Or, $P = X(X-1)(X-\alpha)(X-\beta)$ avec $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Le polynôme P est donc scindé à racines simples, la matrice A est donc diagonalisable.

---

29. Soit E un espace vectoriel de dimension n, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme $\varphi : u \mapsto p \circ u - u \circ p$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

- -

On peut commencer par remarquer que $(\varphi \circ \varphi)(u) = p \circ u - 2\, p \circ u \circ p + u \circ p$, puis

$$\varphi^3(u) = (\varphi \circ \varphi \circ \varphi)(u) = p \circ u - u \circ p = \varphi(u)\ .$$

On a donc $\varphi^3 = \varphi$ et le polynôme $X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est annulateur de l'endomorphisme φ. Ce polynôme étant scindé à racines simples, on en déduit que φ est diagonalisable, et que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{0, -1, 1\}$.

Pour rechercher les sous-espaces propres, une écriture matricielle pourra aider. On a $E = F \oplus G$ avec $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ est une base adaptée à cette décomposition de E, avec $n = \dim(E)$ et $r = \mathrm{rg}(p) = \dim(F)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, posons alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec des blocs de même format.

• Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u \in E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u = u \circ p$, ce qui se traduit matriciellement par $J_r M = M J_r$, condition qui équivaut à $\begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice diagonale par blocs $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui laissent stables les sous-espaces $F = \mathrm{Im}(p)$ et $G = \mathrm{Ker}(p)$. Ainsi, $\dim\big(E_0(\varphi)\big) = r^2 + (n-r)^2$.

• De même, $u \in E_1(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u - u \circ p = u$, soit $J_r M - M J_r = M$, condition équivalente à $\begin{cases} A = 0 \\ C = 0 \\ D = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui vérifient $u(\mathrm{Ker}\, p) \subset \mathrm{Im}\, p$. Ainsi, $\dim\big(E_1(\varphi)\big) = r(n-r)$.

• De même, $u \in E_{-1}(\varphi)$ si et seulement si $p \circ u - u \circ p = -u$, soit $J_r M - M J_r = -M$, condition équivalente à $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \\ D = 0 \end{cases}$. Les endomorphismes u qui conviennent sont ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$, soit encore ceux qui vérifient $u(\mathrm{Im}\, p) \subset \mathrm{Ker}\, p$. Ainsi, $\dim\big(E_{-1}(\varphi)\big) = r(n-r)$.

Remarque. On note que $\dim\big(E_0(\varphi)\big) + \dim\big(E_1(\varphi)\big) + \dim\big(E_{-1}(\varphi)\big) = n^2 = \dim(E)$, on retrouve donc que φ est diagonalisable.

---

30. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, soient F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E. On note p le projecteur sur F parallèlement à G, et s la symétrie par rapport à F

et parallèlement à G. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose $\varphi(f) = p \circ f \circ s$.

a. Montrer que φ est un endomorphisme diagonalisable de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$. *On recherchera un polynôme annulateur.*

b. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme φ.

- -

a. Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on vérifie que $\varphi^2(f) = p \circ (p \circ f \circ s) \circ s = p \circ f$ puisque $p \circ p = p$ et $s \circ s = \mathrm{id}_E$. Puis $\varphi^3(f) = p \circ (p \circ f) \circ s = p \circ f \circ s = \varphi(f)$. On a donc $\varphi^3 = \varphi$, le polynôme $P = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est donc annulateur de l'endomorphisme φ. Comme P est scindé à racines simples, on déduit que φ est diagonalisable.

b. Du **a.**, on déduit que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subset \{-1, 0, 1\}$. Pour chacune de ces trois valeurs, recherchons les vecteurs propres éventuels:

• $\varphi(f) = 0 \iff p \circ f \circ s = 0 \iff p \circ f = 0$ puisque s est bijectif (par exemple composer à droite par $s^{-1} = s$). Finalement, $\varphi(f) = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(p)$. Donc

$$E_0(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi) = \big\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(f) \subset G \big\} .$$

• De même, $\varphi(f) = f \iff p \circ f \circ s = f \iff p \circ f = f \circ s$ ... mais je ne sais trop quoi en déduire! Voyons alors les choses matriciellement. Notons $r = \dim(F) = \mathrm{rg}(p)$, et plaçons-nous dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_r, e_{r+1}, \cdots, e_n)$ de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$. On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = P = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$, et posons $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec le même format de décomposition. La relation $\varphi(f) = f$ se traduit matriciellement par l'égalité $PMS = M$, soit en effectuant les produits par blocs par $\begin{pmatrix} A & -B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, soit par les conditions $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$. Les endomorphismes f invariants par φ sont donc ceux qui sont représentés dans la base $\mathcal{B}$ par une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$. On voit alors que ce sont ceux qui vérifient $G \subset \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Finalement,

$$E_1(\varphi) = \big\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid G \subset \mathrm{Ker}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \subset F \big\} .$$

• Enfin, $\varphi(f) = -f \iff p \circ f \circ s = -f$. En travaillant matriciellement dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ comme ci-dessus, on voit que les endomorphismes recherchés sont ceux dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$. On conclut que

$$E_{-1}(\varphi) = \big\{ f \in \mathcal{L}(E) \mid \mathrm{Im}(f) \subset F \subset \mathrm{Ker}(f) \big\} .$$

Remarque. On aurait pu traiter matriciellement le cas de la valeur propre 0 et conclure que $E_0(\varphi)$ est constitué des endomorphismes f dont la matrice en base adaptée est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$. De cette vision matricielle, on déduit facilement les dimensions des sous-espaces propres de φ (nombre de "degrés de liberté" pour construire une matrice de la forme voulue), à savoir

$$\dim\big(E_0(\varphi)\big)=n(n-r) \quad ; \quad \dim\big(E_1(\varphi)\big)=r^2 \quad ; \quad \dim\big(E_{-1}(\varphi)\big)=r(n-r)\ ,$$

et on peut vérifier que la somme vaut $n^2=\dim\big(\mathcal{L}(E)\big)$, on retrouve donc que φ est diagonalisable.

---

31. Soient f et g deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que f et g commutent si et seulement s'ils sont simultanément diagonalisables (i.e. s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à f et g).

- -

Déjà, s'il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle f et g sont tous deux représentés par des matrices diagonales D et D', comme $DD'=D'D$, on déduit immédiatement que $f\circ g=g\circ f$.

Réciproquement, supposons que f et g commutent. Notons $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_k$ les valeurs propres **distinctes** de f. Comme f est diagonalisable, on a $E=\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k}E_{\lambda_i}(f)$. Pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, le sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$ de f est stable par g, notons g_i l'endomorphisme induit par g sur $E_{\lambda_i}(f)$. Comme g est diagonalisable, un théorème du cours affirme que g_i est aussi diagonalisable, il existe donc une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(f)$ constituée de vecteurs propres de g_i donc de g (puisque g_i est une restriction de g). Les vecteurs de cette base $\mathcal{B}_i$ sont aussi vecteurs propres de f puisqu'ils sont dans $E_{\lambda_i}(f)$. Enfin, la famille de vecteurs de E obtenue par concaténation des $\mathcal{B}_i$, $1\le i\le k$, est une base de E, et elle est constituée de vecteurs propres communs à f et à g.

---

32. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\mathrm{rg}(A)=2$, $\mathrm{tr}(A)=0$ et $A^n\neq 0$. Montrer que la matrice A est diagonalisable.

- -

Comme $\mathrm{rg}(A)=2$, on a $0\in\mathrm{Sp}(A)$ et $\dim\big(E_0(A)\big)=n-2$. Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{C}$, et 0 est valeur propre de multiplicité au moins $n-2$, on a donc $\chi_A=X^{n-2}(X-\alpha)(X-\beta)$ avec α et β des nombres complexes (éventuellement nuls). Puis $\mathrm{tr}(A)=0=\alpha+\beta$. On ne peut alors avoir $(\alpha,\beta)=(0,0)$ car cela entraînerait $\chi_A=X^n$, donc $A^n=0$ par le théorème de Cayley-Hamilton, cela contredit donc une des hypothèses. Les nombres α et β sont donc non nuls et opposés, donc distincts, et la matrice A admet donc deux valeurs propres non nulles distinctes. Pour chacune de ces valeurs propres, il y a alors un sous-espace propre de dimension au moins 1 (et au plus 1 car la somme des dimensions des SEP ne peut dépasser n). Finalement, $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\dim E_\lambda(A)=(n-2)+1+1=n$, donc A est diagonalisable.

---

33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soit u un endomorphisme de E, supposé diagonalisable. À quelle condition existe-t-il un vecteur x de E tel que la famille $\mathcal{F}=\big(x,u(x),u^2(x),\cdots,u^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E ? *On écrira le déterminant de la famille $\mathcal{F}$ relativement à une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres de u.*

- -

Puisque u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ de vecteurs propres, notons $\lambda_1,\ \cdots,\ \lambda_n$ les valeurs propres (*a priori non nécessairement distinctes*) associées à ces vecteurs. Soit x un vecteur de E, on le décompose dans la base $\mathcal{B}$: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a alors $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i$ et, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $u^k(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k x_i e_i$. Le déterminant, relativement à la base $\mathcal{B}$, de la famille de vecteurs $\mathcal{F} = \big(x, u(x), u^2(x), \cdots, u^{n-1}(x)\big)$ est

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda_1 x_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} x_1 \\ x_2 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \lambda_n x_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} x_n \end{vmatrix} = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} .$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) \cdot V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big) \left[\prod_{1 \le j < k \le n} (\lambda_k - \lambda_j)\right] .$$

On cherche une condition nécessaire et suffisante sur l'endomorphisme u pour qu'il existe un vecteur x tel que ce déterminant soit non nul. Il est clairement nécessaire que le déterminant de Vandermonde $V(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ soit non nul, et cette condition est suffisante aussi : en effet, si elle est vérifiée, le vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$ (*celui dont toutes les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont égales à* 1) fera l'affaire.

En conclusion, la condition recherchée est que l'endomorphisme u ait n valeurs propres distinctes.

34*. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. On note $\mathcal{C}_f$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f.

a. Montrer que $\mathcal{C}_f$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

b. Montrer qu'un endomorphisme g appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si chaque sous-espace propre de f est stable par g.

c. En déduire que

$$\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} m_\lambda^2 ,$$

où m_λ est l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ.

d. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\mathrm{id}_E, f, f^2, ..., f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

- -

a. Immédiat.

b. Le sens direct est un résultat du cours: si g commute avec f, alors il laisse stables les sous-espaces propres de f.

Réciproquement, notons λ_1, $\cdots$, λ_k les valeurs propres distinctes de f, on a alors $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(f)$ puisque f est diagonalisable. Soit g un endomorphisme laissant stable chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(f)$, $1 \leq i \leq k$. Si x est un vecteur de E, on peut le décomposer (de façon unique) en $x = x_1 + \cdots + x_k$ avec $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. On a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, puis $(g \circ f)(x) = g\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(x_i)$. D'un autre côté, $g(x) = \sum_{i=1}^{k} g(x_i)$ et, par hypothèse, on a $g(x_i) \in E_{\lambda_i}(f)$ pour tout i, donc

$$(f \circ g)(x) = \sum_{i=1}^{k} f\big(g(x_i)\big) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, g(x_i) = (g \circ f)(x) \ ,$$

on a prouvé que $g \in \mathcal{C}_f$.

c. Notons toujours $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f, et $d_1, \cdots, d_k$ leurs multiplicités (qui sont aussi les dimensions des sous-espaces propres puisque f est diagonalisable). Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E adaptée à la décomposition $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_k}(f)$, i.e. les d_1 premiers vecteurs sont dans $E_{\lambda_1}(f)$, $\cdots$, les d_k derniers sont dans $E_{\lambda_k}(f)$. Alors un endomorphisme g laisse stables les $E_{\lambda_i}(f)$ si et seulement si sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, de la forme $\begin{pmatrix} D_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & D_k \end{pmatrix}$ avec $D_i \in \mathcal{M}_{d_i}(\mathbb{K})$ pour tout i. L'ensemble des matrices de cette forme est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\sum_{i=1}^{k} d_i^2$ (c'est le nombre de coefficients à choisir pour construire une telle matrice). Comme l'application $g \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ est un isomorphisme entre les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc conserve les dimensions, on déduit que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{i=1}^{k} d_i^2$.

d. Dans ce cas, $\dim(\mathcal{C}_f) = n$, et les endomorphismes id_E, f, $\cdots$, f^{n-1} appartiennent effectivement à $\mathcal{C}_f$. Pour montrer qu'ils constituent une base de $\mathcal{C}_f$, il suffit de montrer que la famille $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \cdots, f^{n-1})$ est libre. Soient donc α_0, $\cdots$, α_{n-1} tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k = 0$. Le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ est alors annulateur de f, il doit donc posséder comme racines les n valeurs propres distinctes de f. Comme il est de degré au plus $n-1$, c'est le polynôme nul, ce qui signifie la nullité des coefficients α_i.

---

35. Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $n \geq 2$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose

$$\varphi(P)(X) = (X - a)\left(P'(X) - P'(a)\right) - 2\left(P(X) - P(a)\right) .$$

a. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer ses valeurs propres. Est-il diagonalisable ? *On pourra utiliser le fait que la famille* $\big(1, X - a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

- -

La linéarité de φ est immédiate. La famille $\mathcal{B} = \big(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\big)$ est une base de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$. On constate que $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X-a) = -2(X-a)$ et, pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a

$$\varphi\big((X-a)^k\big) = (X-a)\cdot k(X-a)^{k-1} - 2(X-a)^k = (k-2)\,(X-a)^k\ .$$

Comme les images par φ des polynômes constituant la base $\mathcal{B}$ appartiennent à E, on en déduit que φ est bien un endomorphisme de E (question **a.**). Comme on voit d'autre part que cette base $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de φ, on déduit que φ est diagonalisable, son spectre étant $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{-2\} \cup [\![0, n-2]\!]$, la valeur propre 0 étant double et les autres simples (question **b.**).

---

36. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent, soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$.

a. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \qquad P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}\ .$$

b. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit diagonalisable.

- -

a. On observe que $M^0 = I_{2n} = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ puis, par une récurrence immédiate, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1}B \\ 0_n & A^k \end{pmatrix}\ .$$

Si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, par combinaisons linéaires, on obtient

$$P(M) = \sum_{k=0}^{d} a_k M^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k & \displaystyle\sum_{k=1}^{d} k a_k A^{k-1} B \\ 0_n & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\,B \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}\ .$$

b. Si M est diagonalisable, alors il existe un polynôme P scindé à racines simples tel que $P(M) = 0_{2n}$, ce qui entraîne $P(A) = 0_n$ et $P'(A)\,B = 0_n$. On en déduit que A est diagonalisable, A est donc semblable à une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où les λ_i sont racines de P (puisque P est annulateur de A). Un calcul classique montre alors que la matrice $P'(A)$ est semblable à $P'(D) = \mathrm{diag}\big(P'(\lambda_1), \cdots, P'(\lambda_n)\big)$ et, comme les racines de P sont simples, aucun des λ_i n'est racine de P'. Donc $P'(D)$ est une matrice inversible (car diagonale avec des coefficients diagonaux tous non nuls). Donc $P'(A)$ est aussi une matrice inversible puisqu'elle est semblable à $P'(D)$. La relation $P'(A)\,B = 0_n$ entraîne alors que $B = 0_n$.

On a donc montré que, **si** M est diagonalisable, **alors** A est diagonalisable et B est nulle.

La réciproque est facile: si A est diagonalisable i.e. $A = PDP^{-1}$, alors $M = \begin{pmatrix} A & 0_n \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ l'est aussi puisqu'en posant $Q = \begin{pmatrix} P & 0_n \\ 0_n & P \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0_n \\ 0_n & D \end{pmatrix}$, on a $M = Q\Delta Q^{-1}$.

---

37. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

a. Montrer que tout endomorphisme v de E vérifiant $v^2 = u$ est diagonalisable.

b*. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v de E tel que $v^2 = u$ et $\mathrm{Sp}(v) \subset \mathbb{R}_+^*$.

- -

a. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres (distinctes) de u, alors $P = \prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de u. Donc $0 = P(u) = P(v^2) = Q(v)$, avec

$$Q(X) = P(X^2) = \prod_{k=1}^{p} \left[(X - \sqrt{\lambda_k})(X + \sqrt{\lambda_k})\right] .$$

Ce polynôme Q étant scindé à racines simples, v est diagonalisable.

b. Notons toujours $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de u, on a alors $E = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$.

Si $v \in \mathcal{L}(E)$ satisfait les conditions requises, soit x un vecteur appartenant à l'un des sous-espaces propres $E_{\lambda_k}(u)$. On a alors $v^2(x) = u(x) = \lambda_k x$, soit $(v^2 - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)(x) = 0_E$, soit encore $\left(v + \sqrt{\lambda_k}\,\mathrm{id}_E\right) \circ \left(v - \sqrt{\lambda_k}\,\mathrm{id}_E\right)(x) = 0_E$. Mais $-\sqrt{\lambda_k} \notin \mathrm{Sp}(v)$ donc l'endomorphisme $v + \sqrt{\lambda_k}\,\mathrm{id}_E$ est injectif. On en déduit que $v(x) = \sqrt{\lambda_k}\,x$. Un endomorphisme de E étant entièrement déterminé par ses restrictions aux $E_{\lambda_k}(u)$, cela prouve l'unicité de v.

Réciproquement, l'unique endomorphisme v de E tel que

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \forall x \in E_{\lambda_k}(u) \qquad v(x) = \sqrt{\lambda_k}\,x$$

convient puisque $\mathrm{Sp}(v) = \left\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_p}\right\} \subset \mathbb{R}_+^*$, et v^2 coïncide avec u sur chaque sous-espace $E_{\lambda_k}(u)$ donc $v^2 = u$.

Trigonalisation.

38. Trigonaliser $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- -

En commençant par exemple par l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, on obtient $\chi_A = (X-1)^3$. La matrice A admet donc pour seule valeur propre le nombre 1, de multiplicité 3. La matrice $A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 2, donc le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension 1, on voit facilement que c'est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Montrons que A est semblable à $T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. En nommant u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, on cherche trois vecteurs ε_1, ε_2, ε_3 de $\mathbb{R}^3$, linéairement indépendants, tels que $\begin{cases}\textbf{(1)}: & u(\varepsilon_1) &= \varepsilon_1\\ \textbf{(2)}: & u(\varepsilon_2) &= \varepsilon_1+\varepsilon_2\\ \textbf{(3)}: & u(\varepsilon_3) &= \varepsilon_2+\varepsilon_3\end{cases}$. Choisissons déjà $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, ainsi l'équation **(1)** est satisfaite. On cherche ensuite $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ tel que $(A-I_3)\,\varepsilon_2=\varepsilon_1$, soit $\begin{cases}-x+y+z &= 1\\ -x\qquad+z &= 0\\ -x+y+z &= 1\end{cases}$, le vecteur $\varepsilon_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ convient. On cherche enfin $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$ tel que $(A-I_3)\varepsilon_3=\varepsilon_2$, soit $\begin{cases}-u+v+w &= 1\\ -u\qquad+w &= 0\\ -u+v+w &= 1\end{cases}$, le vecteur $\varepsilon_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ convient. On vérifie que la famille $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, alors on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=T$, autrement dit $A=PTP^{-1}$ avec $P=P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$.

---

39. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $P\in\mathbb{C}[X]$. On suppose que $\chi_A=\prod_{k=1}^{n}(X-\lambda_k)$. Déterminer $\chi_{P(A)}$.

- -

Comme $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la matrice A est trigonalisable: on a $A=QTQ^{-1}$, avec $T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & (\times)\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \lambda_n\end{pmatrix}$ et $Q\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Il est facile de vérifier que, pour tout k entier naturel, la matrice T^k est triangulaire supérieure avec $\lambda_1^k,\cdots,\lambda_n^k$ pour coefficients diagonaux. On en déduit facilement que, si P est un polynôme, alors la matrice $P(T)$ est triangulaire supérieure avec $P(\lambda_1),\cdots,$ $P(\lambda_n)$ pour coefficients diagonaux. Comme on a $P(A)=Q\cdot P(T)\cdot Q^{-1}$ (*calcul classique*), on déduit que

$$\chi_{P(A)}=\chi_{P(T)}=\prod_{k=1}^{n}\big(X-P(\lambda_k)\big)\ .$$

40*. Soient A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB=0$.

a. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun.

b. Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables.

41*. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence

$$A \text{ est nilpotente} \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{tr}(A^k) = 0 \;.$$

- -

Le sens direct est facile: si A est nilpotente, alors pour k entier naturel non nul, A^k l'est aussi donc $\mathrm{Sp}(A^k) = \{0\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: en effet, comme A admet un polynôme annulateur de la forme X^p, sa seule valeur propre possible est 0, et 0 est effectivement valeur propre puisque A est non-inversible. On a donc $\mathrm{tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^k)} m_\lambda \, \lambda = 0$.

Réciproquement, supposons $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons par l'absurde que A admette des valeurs propres non nulles, et notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ ses valeurs propres **non nulles** distinctes, notons $m_1, \cdots, m_p$ leurs multiplicités respectives. On a alors $p \leq n$ et les m_i sont non nuls ($1 \leq i \leq p$). En trigonalisant, on voit que pour tout k, la matrice A^k admet pour valeurs propres non nulles $\lambda_1^k, \cdots, \lambda_p^k$ avec les mêmes multiplicités $m_1, \cdots, m_p$ (*en toute rigueur, ce n'est pas tout à fait vrai car si les* λ_i *sont distincts, les* λ_i^k *peuvent ne plus l'être, mais cela ne change rien pour l'expression de la trace...*). On a donc $\mathrm{tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k m_i = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Conservons seulement les p premières équations, i.e. pour $k \in [\![1, p]\!]$, elles constituent un système linéaire homogène **(S)** de p équations à p inconnues $m_1, \cdots, m_p$ dont le déterminant est

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_p \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_p^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^p & \lambda_2^p & \cdots & \lambda_p^p \end{vmatrix} = \Big(\prod_{i=1}^{p} \lambda_i \Big) \, V_p(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$$

(déterminant de Vandermonde). Les λ_i étant deux à deux distincts et non nuls, ce déterminant est non nul, la seule solution du système **(S)** est alors $m_1 = \cdots = m_p = 0$, ce qui est absurde. On conclut de tout cela que la seule valeur propre de A est 0, donc comme A est trigonalisable, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure T dont les coefficients diagonaux sont nuls et, comme $T^n = 0$, on a aussi $A^n = 0$ et A est nilpotente. *On peut aussi conclure en remarquant que, si* $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, *on a nécessairement* $\chi_A = X^n$ *et utiliser Cayley-Hamilton.*

Théorème de Cayley-Hamilton.

42. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on suppose que les matrices M et $2M$ sont semblables. Montrer que M est nilpotente. *On montrera que* $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

- -

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M, alors λ est aussi valeur propre de $2M$, donc $\dfrac{\lambda}{2}$ est valeur propre de M. En itérant ce raisonnement, on obtient que, pour tout n entier naturel, le scalaire $\dfrac{\lambda}{2^n}$ est valeur propre de M. Si λ est non nul, on déduit que M admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible. On a donc $\mathrm{Sp}(M) \subset \{0\}$ et, comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, le spectre de M est non vide, donc $\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$. Comme le polynôme caractéristique χ_M est scindé, unitaire de degré n, et que sa seule racine est 0, on a donc $\chi_M = X^n$. Enfin, le théorème de Cayley-Hamilton donne $\chi_M(M) = M^n = 0_n$, donc M est nilpotente.

43*. Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe une droite ou un plan de E stable par f. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

- -

• Supposons E de dimension finie.

Soit χ_f le polynôme caractéristique de f, alors $\chi_f \in \mathbb{R}[X]$.

- si χ_f admet une racine réelle λ, alors λ est valeur propre de f, et si on considère un vecteur propre x associé, la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite stable par f.

- sinon, χ_f se décompose dans $\mathbb{R}[X]$ comme produit de facteurs irréductibles $P_1, \cdots, P_k$ qui sont tous des polynômes de degré deux sans racine réelle (que l'on peut supposer unitaires). Le théorème de Cayley-Hamilton nous indique que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul, soit $P_1(f) \circ \cdots \circ P_k(f) = 0$. L'un au moins des endomorphismes $P_i(f)$, $1 \le i \le k$, est non injectif, sinon leur composée $\chi_f(f)$ serait injective, ce qui n'est pas. Posons $P_i = X^2 + \alpha X + \beta$, et considérons un vecteur x non nul appartenant à $\mathrm{Ker}\big(P_i(f)\big)$, on a alors la relation $P_i(f)(x) = f^2(x) + \alpha f(x) + \beta x = 0_E$, donc le plan $\Pi = \mathrm{Vect}\big(x, f(x)\big)$ est stable par f puisque $f(x) \in \Pi$ et $f\big(f(x)\big) = f^2(x) = -\alpha f(x) - \beta x \in \Pi$. *Il s'agit bien d'un plan puisque les vecteurs x et $f(x)$ ne sont pas colinéaires, sinon x serait vecteur propre de f, impossible puisque f n'a pas de valeur propre.*

• Le résultat n'est pas vrai en dimension infinie. Par exemple, soit l'endomorphisme f de l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ défini par $f(P) = XP$. Si un sous-espace vectoriel F de E, non réduit à $\{0\}$, est stable par f, si on considère $P \in F \setminus \{0\}$, alors les polynômes $X^k P = f^k(P)$ $(k \in \mathbb{N})$, qui sont tous de degré distincts, appartiennent à F, donc F est de dimension infinie. Il n'y a donc pas de droite ni de plan stable par f.

---

44. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AM = MB$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune (*on pourra montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)\,M = M\,P(B)$*). Étudier la réciproque.

- -

a. De $AM = MB$, on déduit par une récurrence immédiate que $A^k M = MB^k$ pour tout entier naturel k, puis en faisant des combinaisons linéaires, on obtient que $P(A)\,M = M\,P(B)$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. Avec $P = \chi_A$ en particulier, cela donne $M\,\chi_A(B) = 0$ puisque l'on sait que $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton). Comme M n'est pas la matrice nulle, on en déduit que la matrice $\chi_A(B)$ n'est pas inversible (sinon, en multipliant à droite par son inverse, on obtiendrait $M = 0$). Notons alors $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres (non nécessairement distinctes) de A, on a alors $\chi_A = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$ puisque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ donc χ_A est scindé. Donc

$$0 = \det\left(\chi_A(B)\right) = \det\left(\prod_{k=1}^{n}(B-\lambda_k I_n)\right) = \prod_{k=1}^{n}\det(B-\lambda_k I_n) = (-1)^{n^2}\prod_{k=1}^{n}\chi_B(\lambda_k)\ .$$

L'un des facteurs est donc nul, donc une au moins des valeurs propres λ_k de la matrice A est racine de χ_B donc est aussi valeur propre de B. Donc A et B ont une valeur propre commune.

b. Réciproque

Supposons que A et B admettent une valeur propre commune λ, alors λ est aussi valeur propre de $B^\top$ (une matrice et sa transposée ont le même spectre). Soient $X \in \mathbb{C}^n$ et $Y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs propres associés pour A et $B^\top$ respectivement. On a les relations $X \neq 0$, $Y \neq 0$, $AX = \lambda X$, $B^\top Y = \lambda Y$. En transposant cette dernière, on obtient $Y^\top B = \lambda\, Y^\top$. Posons enfin $M = XY^\top$. Alors $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, M est non nulle (elle est de rang 1), et

$$AM = A(XY^\top) = (AX)Y^\top = \lambda XY^\top = \lambda M = X(\lambda\, Y^\top) = X(Y^\top B) = (XY^\top)B = MB\ .$$

La condition est donc nécessaire et suffisante.

---

45. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

b. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

c. Soit $B = A + \lambda I_3$ avec λ réel non nul. Montrer que B est inversible et que l'on peut écrire $B^{-1} = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$, où α, β, γ sont des réels (dépendant de λ).

- -

a. En développant tout bêtement par la règle de Sarrus, on obtient

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X & b & -a \\ -b & X & c \\ a & -c & X \end{vmatrix} = X\left(X^2 + (a^2+b^2+c^2)\right)\ .$$

Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors χ_A n'est pas diagonalisable (ni même trigonalisable) sur $\mathbb{R}$ puisque son polynôme caractéristique n'est pas scindé.

Si $(a,b,c) = (0,0,0)$, alors A est la matrice nulle, et est évidemment diagonalisable.

b. Pour $(a,b,c) = (0,0,0)$, la matrice nulle est évidemment diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Si $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, alors A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car elle a trois valeur propres complexes distinctes: 0, $i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ et $-i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

c. Le réel non nul $-\lambda$ n'est pas valeur propre de A, donc $B = A + \lambda I_3$ est inversible. Le théorème de Cayley-Hamilton nous apprend que $\chi_B(B) = 0_3$. Or, χ_B est un polynôme de degré 3 de la forme $\chi_B = X^3 + b_2X^2 + b_1X + b_0$ avec $b_0 = -\det(B) \neq 0$. Donc

$$B^3 + b_2B^2 + b_1B + b_0I_3 = 0_3\ , \quad \text{soit} \quad B\,(B^2 + b_2B + b_1I_3) = -b_0I_3\ ,$$

donc

$$B^{-1} = \frac{-1}{b_0}\,(B^2 + b_2 B + b_1 I_3) = -\frac{1}{b_0}\,\big((A+\lambda I_3)^2 + b_2(A+\lambda I_3) + b_1 I_3\big)$$

est bien de la forme voulue, après développement.

---

46. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non scalaire, admettant une unique valeur propre a. Montrer que A est semblable à $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

- -

Le polynôme caractéristique de A est unitaire de degré 2 et admet a pour seule racine, donc $\chi_A = (X-a)^2$. Du théorème de Cayley-Hamilton, on déduit que $(A-aI_2)^2 = 0_2$, soit $\mathrm{Im}(A-aI_2) \subset \mathrm{Ker}(A-aI_2)$. Comme $A \neq aI_2$ et que $a \in \mathrm{Sp}(A)$, on déduit que $\dim\big(\mathrm{Ker}(A-aI_2)\big) = \dim\big(E_a(A)\big) = 1$. Le théorème du rang affirme par ailleurs que $\dim\big(\mathrm{Im}(A-aI_2)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(A-aI_2)\big) = 2$. Finalement,

$$\dim\big(\mathrm{Im}(A-aI_2)\big) = \dim\big(\mathrm{Ker}(A-aI_2)\big) = 1\ .$$

L'inclusion obtenue plus haut montre finalement que $\mathrm{Ker}(A-aI_2) = \mathrm{Im}(A-aI_2)$.

Soit $U \in \mathbb{C}^3$ un vecteur non nul de $E_a(A) = \mathrm{Ker}(A-aI_2)$, on a donc $AU = aU$. Comme $U \in \mathrm{Im}(A-aI_2)$ d'après le raisonnement ci-dessus, il existe un vecteur V tel que $(A-aI_2)V = U$, i.e. tel que $AV = U + aV$. Le vecteur V n'est pas colinéaire à U puisqu'il, n'appartient pas à la droite vectorielle $\mathrm{Ker}(A-aI_2)$, donc $\mathcal{B} = (U,V)$ est une base de $\mathbb{C}^2$, et les relations $AU = aU$ et $AV = U + aV$ montrent que, dans cette base $\mathcal{B}$, l'endomorphisme u_A de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à la matrice A est représenté par la matrice $M = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Ces deux matrices sont donc semblables.

Exercices avec Python.

47. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -7 & -3 & 0 \\ 54 & 8 & -36 \\ 3 & -3 & -10 \end{pmatrix}$. Soit le vecteur $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a. Pour tout entier naturel n, on note X_n le n-ième itéré de X_0 par A (ou par l'endomorphisme canoniquement associé), c'est-à-dire $X_n = A^n\,X_0$. Faire afficher les X_n pour n de 0 à 15 (*valeurs approchées*). Que remarque-t-on ?

b. Pour travailler avec des valeurs numériques "raisonnables", on norme les X_n à chaque étape, autrement dit on construit une suite de vecteurs (Y_n), avec $Y_0 = \dfrac{X_0}{\|X_0\|}$, puis $Y_{n+1} = \dfrac{AY_n}{\|AY_n\|}$.
Pour n de 1 à 15, afficher le vecteur Y_n ainsi que le produit scalaire $(AY_n|Y_n)$. Conclusion ?

c. Tester avec d'autres vecteurs "initiaux" X_0 construits aléatoirement.

d. En prenant $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qu'obtient-on avec 20 itérations ? avec 40 itérations ?

e. Utiliser les fonctions du module `numpy.linalg` pour diagonaliser la matrice A.

f. Comment interpréter les résultats des calculs précédents ?

Les notations $(\cdot|\cdot)$ *et* $\|\cdot\|$ *représentent respectivement le produit scalaire canonique et la norme euclidienne canonique sur* $\mathbb{R}^n$.