CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 3
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

Partie A. Questions de cours. Relire le cours!

Partie B.

B.1.a. La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+a\,\sin^2 x}$ vérifie la propriété de symétrie $g(\pi-x)=g(x)$, autrement dit son graphe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que son intégrale sur $[0,\pi]$ vaut deux fois son intégrale sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Pour plus de détails, on peut utiliser la relation de Chasles pour écrire que l'intégrale sur $[0,\pi]$ est la somme de l'intégrale sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et de l'intégrale sur $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, puis poser le changement de variable $t=\pi-x$ dans cette deuxième intégrale.

b. Posons $t=\tan x$, soit $x=\mathrm{Arctan}\,t$ puisqu'ici $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a\,\sin^2 x} &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+a\,\frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+(1+a)\,t^2}\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+a}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+a}}\ ,\end{aligned}$$

Remarques. On a utilisé la relation trigonométrique $\dfrac{1}{\cos^2(t)}=1+\tan^2(t)$, soit encore $\cos^2(t)=\dfrac{1}{1+\tan^2(t)}=\dfrac{1}{1+t^2}$, puis $\sin^2(t)=\cos^2(t)\,\tan^2(t)=\dfrac{t^2}{1+t^2}$. On a ensuite posé le changement de variable $u=t\,\sqrt{1+a}$.

On en déduit que $J(a)=\dfrac{\pi}{\sqrt{1+a}}$.

B.2.a. Une translation de la variable (poser $x=t+k\pi$) donne $u_k=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+(t+k\pi)^\alpha\,\sin^2(t)}$, en remarquant que la fonction $\sin^2$ est π-périodique. Puis, pour $t\in[0,\pi]$, on a l'encadrement

$$\frac{1}{1+\big((k+1)\pi\big)^\alpha\,\sin^2(t)}\leq\frac{1}{1+(t+k\pi)^\alpha\,\sin^2(t)}\leq\frac{1}{(k\pi)^\alpha\,\sin^2(t)}\ .$$

En intégrant ces inégalités pour t décrivant $[0,\pi]$, on obtient

$$J\big((k+1)^\alpha\,\pi^\alpha\big)\leq u_k\leq J(k^\alpha\pi^\alpha)\ ;$$

b. On a donc obtenu l'encadrement

$$\forall k\in\mathbb{N}\qquad \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^\alpha(k+1)^\alpha}}\ \leq\ u_k\ \leq\ \frac{\pi}{\sqrt{1+\pi^\alpha k^\alpha}}\ ,$$

d'où un équivalent $u_k\sim\dfrac{C}{k^{\alpha/2}}$, où $C=\pi^{1-\frac{\alpha}{2}}$ est une constante strictement positive. Par comparaison à une série de Riemann, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}u_k$ converge si et seuelement si $\dfrac{\alpha}{2}>1$, soit $\alpha>2$. Exprimé autrement, la suite (u_k) est sommable si et seulement si $\alpha>2$.

c. La fonction f_α est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, elle est donc intégrable sur cet intervalle si et seulement ses intégrales partielles $\displaystyle\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t$ sont majorées. Faisons une disjonction de cas (puisque l'étude ci-dessus nous y amène assez naturellement):

- si $\alpha > 2$, alors pour tout $x \geq 0$, en posant $N = 1 + \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$, on a

$$\int_0^x f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{N\pi} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \leq S\ ,$$

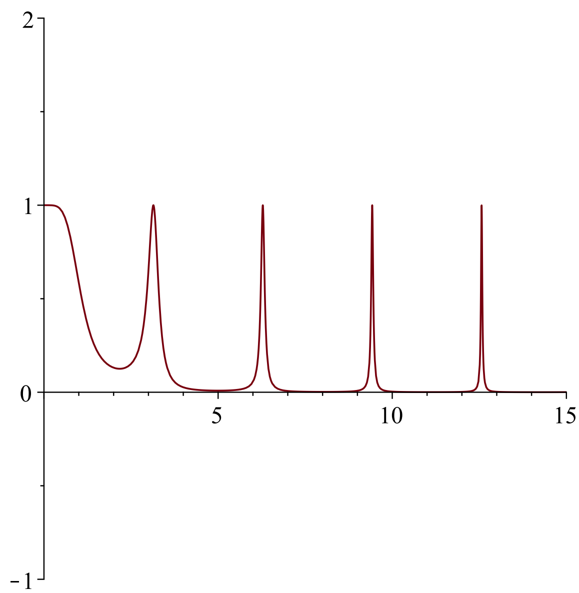
en posant $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k < +\infty$. On en déduit l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}_+$.

- si $\alpha \leq 2$, alors $\displaystyle\int_0^{n\pi} f_\alpha(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc f_α n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Bilan: La fonction f_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\alpha > 2$.

B.3. Si $\alpha > 2$, la fonction f_α est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, mais $f_\alpha(k\pi) = 1$ pour tout k entier naturel, ce qui montre que $f_\alpha(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers l'infini.

Ci-dessous, la représentation graphique de f_3:



Partie C.

C.1. Posons $V = \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,\mathrm{d}t$ (par hypothèse cette intégrale converge). On a alors $V = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ (définition d'une intégrale généralisée comme limite des intégrales partielles), donc aussi $V = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n h(t)\,\mathrm{d}t$. Donc

$$V_n = \int_0^{n+1} h(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^n h(t)\,\mathrm{d}t \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad V - V = 0\ .$$

C.2. Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle admet des primitives, notons H l'une d'elles. On a alors $V_n = \displaystyle\int_n^{n+1} h(t)\mathrm{d}t = H(n+1)-H(n)$ par le théorème fondamental de l'analyse, puis comme H est dérivable de dérivée h, l'égalité des accroissements finis affirme l'existence d'un réel $a_n \in\,]n, n+1[$ tel que $V_n = \big((n+1)-n\big)\,H'(a_n) = h(a_n)$. L'encadrement $n < a_n < n+1$ montre que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Enfin, $h(a_n) = V_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En admettant (*pour les puristes*) l'axiome du choix dénombrable, on a ainsi démontré l'existence d'une suite (a_n) satisfaisant les conditions imposées.

Partie D.

D.1. Il s'agit de montrer que F est un s.e.v. de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

• Il est clair que $0 \in F$ donc $F \neq \emptyset$.

• Si $f \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\big(\lambda f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \big(\lambda f)'(t)^2\,\mathrm{d}t$ sont convergentes (linéarité de la dérivation et de l'intégrale). Ainsi, $\lambda f \in F$, et F est stable par la multiplication par un scalaire.

• Si $f \in F$ et $g \in F$, alors $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, et les fonctions f', g', $t \mapsto tf(t)$ et $t \mapsto tg(t)$ appartiennent à E. Comme E est un espace vectoriel (question **A.3.**), on déduit que les fonctions $f' + g' = (f+g)'$ et $t \mapsto t\,\big(f(t)+g(t)\big)$ appartiennent à E, donc sont de carré intégrable, ce qui prouve que $f+g \in F$ et démontre la stabilité de F par addition.

D.2. Par hypothèse, la fonction $t \mapsto t^2 f(t)^2$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et on a $f(t)^2 = o\big(t^2 f(t)^2\big)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui entraîne l'intégrabilité de f^2 sur $[0, +\infty[$, donc la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Les fonctions f' et $t \mapsto tf(t)$ étant de carré intégrable sur $\mathbb{R}_+$, leur produit est intégrable (question **A.2.**), d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$.

D.3. Posons $U = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t$ et $V = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2\,\mathrm{d}t$. On vient de prouver l'existence de ces deux intégrales.

Pour tout x réel positif, une intégration par parties donne la relation

$$\int_0^x t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,x\,f(x)^2 - \frac{1}{2}\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t\ .$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x t\,f(t)\,f'(t)\,\mathrm{d}t = U$ et $\lim_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t = V$, on déduit par différence que le terme $x\,f(x)^2$ admet une limite finie l (égale à $V+2U$). Mais la fonction $t \mapsto t\,f(t)^2$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car, au voisinage de $+\infty$, c'est un $o\big(t^2 f(t)^2\big)$, même raisonnement que question **D.2.** ci-dessus), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\ f(t)^2\ \mathrm{d}t$ est convergente et, par la question **C.2.**, il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n\ f(a_n)^2 = 0$. Comme, par ailleurs, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n\ f(a_n)^2 = l = V + 2U$, on déduit par unicité de la limite que $l = 0$, soit $U = -\dfrac{1}{2}V$, *quod erat demonstrandum.*

D.4. C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz: en effet, les fonctions $u\ :\ t \mapsto t\ f(t)$ et $v = f'$ appartiennent à $E = L^2_c(I, \mathbb{R})$, on a donc $\big|(u|v)\big| \leq \|u\|_2\,\|v\|_2$, où $\|\cdot\|_2$ représente la "norme de la convergence en moyenne quadratique", i.e. la norme associée au produit scalaire introduit à la question **A.4.**. Cela s'écrit encore $(u|v)^2 \leq \|u\|_2^2\|v\|_2^2$, soit

$$\left(\int_0^{+\infty} t\ f(t)\ f'(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq \left(\int_0^{+\infty} t^2\ f(t)^2\ \mathrm{d}t\right)\left(\int_0^{+\infty} f'(t)^2\ \mathrm{d}t\right)$$

et, en utilisant la relation obtenue à la question précédente, on a l'inégalité demandée.

PROBLÈME 2

d'après Mines-Ponts, PC, 2016

Partie A. Un cousin de Vandermonde

1. Si $d_k = d_l$, où k et l sont deux indices distincts de l'intervalle $[\![1, n]\!]$, alors les colonnes C_k et C_l du déterminant $D_n(d_1, \cdots, d_n)$ sont identiques, ce déterminant est donc nul.

2. $D_2(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x$. Puis $D_3(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 - x & y^2 - y & z^2 - z \end{vmatrix}$.

On peut ramener ce dernier déterminant à un Vandermonde par l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$. Ainsi, $D_3(x, y, z) = V_3(x, y, z) = (y - x)(z - x)(z - y)$.

3.a. On a

$$P(x) = D_{n+1}(d_1, \cdots, d_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ [d_1]_1 & \cdots & [d_n]_1 & [x]_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ [d_1]_{n-1} & \cdots & [d_n]_{n-1} & [x]_{n-1} \\ [d_1]_n & \cdots & [d_n]_n & [x]_n \end{vmatrix}.$$

Un développement par rapport à la dernière colonne donne $\displaystyle P(x) = \sum_{i=1}^{n+1} c_{i,n+1}\ [x]_{i-1}$, où $c_{i,n+1}$ représente le cofacteur d'indices $(i, n + 1)$ de la matrice représentée ci-dessus (ce cofacteur est une constante, i.e. ne dépend pas de x). Comme, pour tout k entier naturel, la fonction $x \mapsto [x]_k$ est polynomiale, unitaire, de degré k exactement, on déduit que l'application P est polynomiale de degré au plus n. De plus, le coefficient de x^n est le cofacteur $c_{n+1,n+1}$, égal au déterminant $D_n(d_1, \cdots, d_n)$.

b. D'après la question **1.**, on a $P(d_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le polynôme P est donc factorisable par $(X - d_1) \cdots (X - d_n)$. Comme il est de degré au plus n, on a donc $P = \lambda\,(X - d_1) \cdots (X - d_n)$, où λ est un réel. Enfin, connaissant le coefficient de X^n, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) = D_{n+1}(d_1, \cdots, d_n, x) = D_n(d_1, \cdots, d_n) \cdot \prod_{k=1}^{n} (x - d_k)\ .$$

4. Par récurrence sur n: c'est vrai pour $n = 2$ puisque $D_2(d_1, d_2) = d_2 - d_1$.

Supposons la formule vraie pour un entier n donné avec $n \geq 2$, soient $n + 1$ réels d_1, $\cdots$, d_n, d_{n+1}. Alors:

- si d_1, $\cdots$, d_n ne sont pas tous distincts, d'après **1.**, on a

$$D_{n+1}(d_1, \cdots, d_n, d_{n+1}) = \ 0\ = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (d_j - d_i)\ ;$$

- si d_1, $\cdots$, d_n sont deux à deux distincts, de la question **3.b.**, on déduit (en utilisant l'hypothèse de récurrence) que

$$D_{n+1}(d_1, \cdots, d_n, d_{n+1}) = P(d_{n+1}) = \left[\prod_{1 \leq i < j \leq n} (d_j - d_i)\right] \cdot \prod_{k=1}^{n} (d_{n+1} - d_k) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (d_j - d_i)\ ,$$

ce qui achève la récurrence.

Partie B. Le wronskien d'une famille de fonctions.

5. Les fonctions f_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$f_k^{(j)}(x) = a_k\ d_k(d_k - 1) \cdots (d_k - j + 1)\ x^{d_k - j} = a_k\ [d_k]_j\ x^{d_k - j}\ .$$

Ainsi, pour tout $x > 0$,

$$W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} a_1 x^{d_1} & a_2 x^{d_2} & \cdots & a_n x^{d_n} \\ a_1 [d_1]_1 x^{d_1 - 1} & a_2 [d_2]_1 x^{d_2 - 1} & \cdots & a_n [d_n]_1 x^{d_n - 1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 [d_1]_{n-1} x^{d_1 - (n-1)} & a_2 [d_2]_{n-1} x^{d_2 - (n-1)} & \cdots & a_n [d_n]_{n-1} x^{d_n - (n-1)} \end{vmatrix}.$$

Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on note la présence du facteur $a_j x^{d_j}$ sur la j-ème colonne.

Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, on note la présence du facteur $x^{-(i-1)}$ sur la i-ème ligne.

La linéarité du déterminant par rapport à chaque ligne ou colonne de la matrice permet d'obtenir

$$W_n(f_1, \cdots, f_n)(x) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_j x^{d_j}\right) \cdot \left(\prod_{i=2}^{n} x^{-(i-1)}\right) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ [d_1]_1 & [d_2]_1 & \cdots & [d_n]_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [d_1]_{n-1} & [d_2]_{n-1} & \cdots & [d_n]_{n-1} \end{vmatrix}.$$

On reconnaît donc le déterminant $D_n(d_1, \cdots, d_n)$. Comme $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} (i - 1) = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$, on obtient bien

$$W_n(f_1,\cdots,f_n)(x)=\Big(\prod_{k=1}^{n}a_k\Big)\cdot D_n(d_1,\cdots,d_n)\cdot x^{d_1+\cdots+d_n-\frac{n(n-1)}{2}}\ .$$

6. Pour tout $x\in I$, on a

$$W_n(f_1g,\cdots,f_ng)(x)=\begin{vmatrix}(f_1g)(x)&\cdots&(f_ng)(x)\\(f_1g)'(x)&\cdots&(f_ng)'(x)\\\vdots&&\vdots\\(f_1g)^{(n-1)}(x)&\cdots&(f_ng)^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}=g(x)\cdot\begin{vmatrix}f_1(x)&\cdots&f_n(x)\\(f_1g)'(x)&\cdots&(f_ng)'(x)\\\vdots&&\vdots\\(f_1g)^{(n-1)}(x)&\cdots&(f_ng)^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}$$

après avoir “sorti” le facteur $g(x)$ commun à tous les coefficients de la première ligne.

Ensuite, pour tout j, on a $(f_jg)'(x)=f_j'(x)g(x)+f_j(x)g'(x)$. L'opération élémentaire $L_2\leftarrow L_2-g'(x)\,L_1$, suivie de la “sortie” du facteur $g(x)$ commun à tous les coefficients de la deuxième ligne, nous conduit à

$$W_n(f_1g,\cdots,f_ng)(x)=g(x)^2\cdot\begin{vmatrix}f_1(x)&\cdots&f_n(x)\\f_1'(x)&\cdots&f_n'(x)\\(f_1g)''(x)&\cdots&(f_ng)''(x)\\\vdots&&\vdots\\(f_1g)^{(n-1)}(x)&\cdots&(f_ng)^{(n-1)}(x)\end{vmatrix}\ .$$

Ensuite, comme $(f_jg)''=f_j''g+2f_j'g'+f_jg''$, on fait $L_3\leftarrow L_3-2g'(x)\,L_2-g''(x)\,L_1$ et on “sort” un nouveau facteur $g(x)$ de la troisième ligne. On continue à progresser ainsi ligne par ligne, on effectuera ainsi, pour tout i de 2 à n, l'opération élémentaire $L_i\leftarrow L_i-\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}\binom{i-1}{k-1}g^{(i-k)}(x)\,L_k$, suivie de la “sortie” du facteur $g(x)$ commun à tous les coefficients de la ligne L_i. Au final, on obtient la relation demandée

$$W_n(f_1g,f_2g,\cdots,f_ng)=g^n\cdot W_n(f_1,f_2,\cdots,f_n)\ .$$

7. Si f_1 ne s'annule pas sur I, on peut écrire

$$W_n(f_1,\cdots,f_n)=W_n\Big(f_1\cdot 1,f_1\cdot\frac{f_2}{f_1},\cdots,f_1\cdot\frac{f_n}{f_1}\Big)=f_1^n\cdot W_n\Big(1,\frac{f_2}{f_1},\cdots,\frac{f_n}{f_1}\Big)\ .$$

Or, si g_2, $\cdots$, g_n sont $n-1$ fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on constate que

$$W_n(1,g_2,\cdots,g_n)=\begin{vmatrix}1&g_2&\cdots&g_n\\0&g_2'&\cdots&g_n'\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&g_2^{(n-1)}&\cdots&g_n^{(n-1)}\end{vmatrix}=W_{n-1}(g_2',\cdots,g_n')$$

après développement par rapport à la première colonne. On obtient finalement

$$W_n(f_1,f_2,\cdots,f_n)=f_1^n\cdot W_{n-1}\bigg(\Big(\frac{f_2}{f_1}\Big)',\Big(\frac{f_3}{f_1}\Big)',\cdots,\Big(\frac{f_n}{f_1}\Big)'\bigg)\ .$$

PARTIE C. Annulation du wronskien.

8. Si la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée, il existe des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j = 0$.

On a alors aussi pour tout i la relation $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j^{(i)} = 0$ par linéarité de la dérivation. On a donc entre les colonnes du wronskien la relation de dépendance $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$, d'où $W_n(f_1, \cdots, f_n) = 0$ sur I.

9. On a $W_2(f_1, f_2)(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, donc

$$\left(\frac{f_2}{f_1}\right)' = \frac{f_2' f_1 - f_2 f_1'}{f_1^2} = 0 \quad \text{sur} \quad I \ .$$

La fonction $\dfrac{f_2}{f_1}$ est donc constante sur I, i.e. il existe λ réel tel que $f_2 = \lambda f_1$.

10.a. La fonction h est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$, et elle est continue à gauche en 0. Enfin,

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} e^{-y} = 0 = h(0) \ ,$$

donc h est aussi continue à droite en 0. Finalement, h est continue sur $\mathbb{R}$.

b. La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions du même métal. L'expression de sa dérivée k-ème proposée par l'énoncé se prouve par récurrence. Pour $k = 0$, c'est vrai avec $P_0 = 1$ (polynôme constant). Si c'est vrai au rang k avec $k \in \mathbb{N}$ donné, alors par dérivation de produits et de fonctions composées,

$$h^{(k+1)}(x) = -\frac{1}{x^2} P_k'\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2} P_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} \ ,$$

en posant $P_{k+1}(X) = X^2 \big(P_k(X) - P_k'(X)\big)$, ce qui est bien l'expression d'un polynôme. La récurrence est donc achevée.

c. On procède par applications répétées du théorème de la limite de la dérivée.

Notons d'abord que, si P est un polynôme, alors $\lim_{x \to 0^+} P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} P(y)\, e^{-y} = 0$ par croissances comparées des fonctions puissances et des exponentielles.

La fonction h est d'abord continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $\lim_{x \to 0} h'(x) = 0$: pour la limite à gauche c'est évident, et pour la limite à droite cela résulte de la remarque ci-dessus. On déduit du théorème que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Si l'on suppose h de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$, le même raisonnement appliqué à la fonction $h^{(n)}$ montre que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc que h est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On conclut donc par récurrence que h est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout n entier naturel, donc qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

d. Posons $f_1(x) = h(x)$ et $f_2(x) = h(-x)$. Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elles ne sont pas proportionnelles, donc la famille (f_1, f_2) est libre.

Cependant, $W_2(f_1, f_2)(x) = f_1(x) f_2'(x) - f_2(x) f_1'(x)$ est nul pour tout x réel, puisque $f_1(x)$ et $f_1'(x)$ sont nuls pour $x \leq 0$, alors que $f_2(x)$ et $f_2'(x)$ sont nuls pour $x \geq 0$.

11. • Pour $n = 2$, soient f_1 et f_2 de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I telles que $W_2(f_1, f_2) = 0$.

- si $f_1 = 0$, il est clair que la famille (f_1, f_2) est liée dans $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$;

- sinon, il existe $c \in I$ tel que $f_1(c) \neq 0$. Par continuité de f_1, il existe un intervalle ouvert non vide J inclus dans I (par exemple de la forme $]c - \alpha, c + \alpha[$ avec $\alpha > 0$) sur lequel f_1 ne s'annule pas. La question **9.** nous apprend alors que les fonctions f_1 et f_2 sont proportionnelles sur J, i.e. $\Big(f_1|_J, f_2|_J\Big)$ est une famille liée dans $\mathcal{C}^\infty(J, \mathbb{R})$.

• Soit $n \geq 3$, supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Soient n fonctions $f_1, \cdots, f_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, telles que $W_n(f_1, \cdots, f_n) = 0$ sur I. Le début de la discussion est analogue.

- si $f_1 = 0$, il est clair que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est liée dans $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$;

- sinon, il existe $c \in I$ tel que $f_1(c) \neq 0$. Par continuité de f_1, il existe un intervalle ouvert non vide J inclus dans I sur lequel f_1 ne s'annule pas. Il résulte alors de la question **7.** que $W_{n-1}\left(\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)', \left(\dfrac{f_3}{f_1}\right)', \cdots, \left(\dfrac{f_n}{f_1}\right)'\right) = 0$ sur J. L'hypothèse de récurrence permet alors d'affirmer qu'il existe un intervalle ouvert non vide K inclus dans J (donc dans I) tel que les restrictions à K des fonctions $\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)', \cdots, \left(\dfrac{f_n}{f_1}\right)'$ sont linéairement dépendantes. Il existe donc des scalaires $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\lambda_2 \left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)' + \cdots + \lambda_n \left(\dfrac{f_n}{f_1}\right)' = 0$ sur K. On a donc, sur K, la relation $\lambda_2 \dfrac{f_2}{f_1} + \cdots + \lambda_n \dfrac{f_n}{f_1} = -\lambda_1$, où λ_1 est un réel, autrement dit $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$ sur K, avec $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ non tous nuls. Les restrictions à K des fonctions $f_1, \cdots, f_n$ constituent donc une famille liée dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(K, \mathbb{R})$, ce qui achève la preuve par récurrence.

EXERCICE 1

1. Partons du second membre:

$$1 + 2\,\mathrm{sh}^2(t) = 1 + 2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{2}\left(e^{2t} - 2 + e^{-2t}\right) = \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \mathrm{ch}(2t)\ .$$

2. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 + x^2}{1 + x^4}$ est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$, d'où son intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ et l'existence de l'intégrale J.

L'application $\varphi : t \mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ vers $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, donc

$$\begin{aligned} J &= \int_{\mathbb{R}_+^*} f = \int_{\mathbb{R}} (f \circ \varphi)\, \varphi' = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^t)\, e^t\, \mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + e^{2t}}{1 + e^{4t}}\, e^t\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{ch}(2t)}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(t)}{1 + 2\,\mathrm{sh}^2(t)}\, \mathrm{d}t \end{aligned}$$

en utilisant la question **1.**

L'application $\psi : t \mapsto \mathrm{sh}(t)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, le changement de variable $u = \psi(t) = \mathrm{sh}(t)$ nous donne

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+2\psi(t)^2}\,\psi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{2}\,(1+v^2)}\ ,$$

en terminant par le changement de variable $v=\sqrt{2}\,u$. Donc $J=\frac{1}{\sqrt{2}}\big[\,\mathrm{Arctan}(v)\big]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

3. Posons $y=\frac{1}{x}$ dans l'intégrale I (la fonction $x\mapsto\frac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissante et bijective de $]0,+\infty[$ vers lui-même). On obtient

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}=-\int_{+\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}y}{y^2\left(1+\frac{1}{y^4}\right)}=\int_0^{+\infty}\frac{y^2\,\mathrm{d}y}{1+y^4}=\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}\ .$$

De la question **2.**, on déduit alors que $2I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=J=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, donc $I=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

EXERCICE 2 *(extrait de e3a PC, 2012)*

1. On a $\Delta_1=1+u_1v_1$ et $\Delta_2=1+u_1v_1+u_2v_2$ par la règle de Sarrus (pertinente ici, il n'y a pas de factorisation à espérer).

2. On développe Δ_n (déterminant d'ordre $n+1$) par rapport à sa dernière ligne:

$$\Delta_n=(-1)^{(n+1)+n}\,u_n\begin{vmatrix} & & & 0\\ & \Delta_{n-2} & & \vdots\\ & & & 0\\ 0 & \cdots & u_{n-1} & -v_n\end{vmatrix}_{(n)}+(-1)^{(n+1)+(n+1)}\,\Delta_{n-1}\ ,$$

puis en redéveloppant par rapport à la dernière colonne, $\Delta_n=u_nv_n\,\Delta_{n-2}+\Delta_{n-1}$.

3. On prouve d'abord, par récurrence double, que $\Delta_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: c'est vrai pour $n=1$ et pour $n=2$ d'après la question **1.** puis, si c'est vrai aux rangs $n-1$ et $n-2$ avec $n\geq 3$, alors la relation obtenue en **2.** montre que $\Delta_n=u_nv_n\,\Delta_{n-2}+\Delta_{n-1}\geq 0$.

Pour $n\geq 3$, on a alors $\Delta_n-\Delta_{n-1}=a_n\Delta_{n-2}\geq 0$. Comme, pour $n=2$, on a $\Delta_2-\Delta_1=a_2\geq 0$, on peut affirmer que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

4. Encore par récurrence double: on a $\Delta_1=1+a_1=\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(1+a_k)$ et

$$\Delta_2=1+a_1+a_2\leq 1+a_1+a_2+a_1a_2=(1+a_1)(1+a_2)\ .$$

Si l'inégalité demandée est vraie aux rangs $n-2$ et $n-1$ avec $n\geq 3$, alors

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \Delta_{n-1}+a_n\,\Delta_{n-2}\\ &\leq \prod_{k=1}^{n-1}(1+a_k)+a_n\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)\\ &= \left[\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)\right]\Big[(1+a_{n-1})+a_n\Big]\end{aligned}$$

$$\leq \quad \left[\prod_{k=1}^{n-2}(1+a_k)\right](1+a_{n-1})\,(1+a_n) \;=\; \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\,.$$

5.a. Les a_k étant positifs, on a $0 \leq \ln(1+a_k) \leq a_k$ pour tout k. Par comparaison de séries à termes positifs, on déduit la convergence de la série de terme général $\ln(1+a_k)$, autrement dit de la suite (S_n) de ses sommes partielles. En posant $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, par continuité de la fonction exponentielle, on a $P_n = \exp(S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^S$.

b. On a $\Delta_n \leq P_n$ par la question **4.** Or, la suite (P_n) est convergente, donc majorée. La suite (Δ_n) est alors a fortiori majorée ; comme elle est croissante d'après **3.**, on déduit qu'elle converge.

6.a. On a $\Delta_1 \geq 1$ et la suite (Δ_n) croît, donc $\Delta_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b. On reconnaît la série télescopique associée à la suite (Δ_n). Comme la suite (Δ_n) converge, la série $\sum(\Delta_n - \Delta_{n-1})$ converge.

c. On a $t_n = a_n\,\Delta_{n-2} \geq a_n$, donc $0 \leq a_n \leq t_n$. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ converge.

7. On a établi l'équivalence entre la convergence de la suite (Δ_n) et la convergence de la série $\sum a_n$.