RÉDUCTION des ENDOMORPHISMES

I. <u>Éléments propres.</u>

1. <u>Notion de vecteur propre.</u>

<u>Définition 1.</u> Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **vecteur propre** de u tout vecteur x **<u>non nul</u>** de E tel que $u(x)$ soit colinéaire à x.

Ainsi, x est vecteur propre de u si et seulement si $x \neq 0_E$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On peut préciser que ce scalaire λ est alors unique (le vecteur x étant non nul, si on a $\lambda x = \mu x$ alors $\lambda = \mu$), on l'appellera **valeur propre** de u associée au vecteur x, on y reviendra plus en détail dans le paragraphe suivant.

<u>Exemple 1.</u> Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes. Soit D l'**opérateur de dérivation**, i.e. l'application de E vers E qui, à toute fonction f associe sa dérivée $f' = D(f)$. Ainsi défini, D est un endomorphisme de E, et ses vecteurs propres sont les fonctions non nulles f de E telles que f' soit colinéaire à f, autrement dit "les fonctions exponentielles" ou, pour être plus précis, les fonctions de la forme $x \mapsto C\, e^{\lambda x}$ avec $C \in \mathbb{C}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>Exemple 2.</u> Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites complexes. Soit T l'**opérateur de translation**, i.e. l'application de E vers E qui, à toute suite $u = (u_n)$ associe sa "translatée" $v = T(u)$ définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$. Ainsi défini, T est un endomorphisme de E, et ses vecteurs propres sont les suites non nulles u de E pour lesquelles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n$, autrement dit "les suites géométriques" ou, pour être plus précis, les suites (u_n) de la forme $u_n = C\, r^n$ avec $C \in \mathbb{C}^*$ et $r \in \mathbb{C}$.

<u>Exercice I.1.1.</u> Soit l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (-y, x) \end{cases}$. Montrer que cet endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ n'admet pas de vecteur propre. Écrire la matrice canoniquement associée. Donner une interprétation géométrique de f. Si l'on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ défini par la même formule de calcul, admet-il des vecteurs propres ? $\square$

<u>Exercice I.1.2.</u> Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On suppose que tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u. Montrer que u est une homothétie, i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda\ \mathrm{id}_E$. $\square$

<u>Proposition.</u> Soit u un endomorphisme de E. Un vecteur x non nul de E est vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par u.

<u>Preuve.</u> • *Si x est vecteur propre de u, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Si $y \in D$, alors il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha x$. Par linéarité de u, on a alors $u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha \lambda x \in D$, donc D est stable par u.*

• *Si D est stable par u, comme $x \in D$, on doit avoir $u(x) \in D$, donc il existe λ scalaire tel que $u(x) = \lambda x$, et x est bien un vecteur propre de u.*

Rechercher les vecteurs propres d'un endomorphisme, c'est donc rechercher les droites vectorielles de E stables par cet endomorphisme. La droite engendrée par le vecteur non nul x est parfois notée $\mathbb{K}x$ au lieu de $\mathrm{Vect}(x)$.

<u>Définition 1bis.</u> Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **vecteur propre** de A toute matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, **<u>non nulle</u>**, telle que AX soit colinéaire à X.

Ainsi, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est vecteur propre de A si et seulement si $X \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$. Ce scalaire λ est alors unique, on l'appellera **valeur propre** de A associée au vecteur X. En fait, en identifiant classiquement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^n$, les vecteurs propres de A sont les vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

2. Notion de valeur propre.

Définition 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle **valeur propre** de u tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe un vecteur x de E **non nul** tel que $u(x) = \lambda x$.

Bien sûr, le vecteur x mentionné dans la définition est alors un **vecteur propre** de u “pour la valeur propre λ”. Et tout vecteur de E, non nul et colinéaire à x, est aussi vecteur propre de u associé à cette valeur propre λ. On dit parfois que (λ, x) est un **couple propre** de l'endomorphisme u.

Caractérisation. Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de u si et seulement si l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est non injectif.

En effet, la définition 2 ci-dessus signifie que λ est valeur propre de u si et seulement si $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ *n'est pas réduit à* $\{0_E\}$.

Définition. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**, l'ensemble des valeurs propres de u est appelé **spectre** de u, et noté $\mathrm{Sp}(u)$. Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(u) = \Big\{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda x\Big\}\ .$$

Remarque (hors programme, pour la culture). On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur spectrale** de u lorsque l'endomorphisme $u - \lambda\,\mathrm{id}_E$ est non bijectif. Le **spectre** de u est défini comme étant l'ensemble des valeurs spectrales de u. En dimension finie, les notions de valeur spectrale et de valeur propre coïncident, ce qui autorise à appeler spectre l'ensemble des valeurs propres.

Exercice I.2.1. Soit $E = \mathbb{K}[X]$, soit Φ l'endomorphisme de E défini par $\Phi(P) = XP$ pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que Φ n'admet aucune valeur propre. Montrer que tout scalaire est valeur spectrale de Φ. $\square$

Définition 2bis. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **valeur propre** de A tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ pour lequel il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, **non nulle**, telle que $AX = \lambda X$.

Ainsi, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement s'il est valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Comme une matrice carrée représente toujours un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, on pourra appeler **spectre** de A, et noter $\mathrm{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de la matrice A.

Attention! Si A est une matrice carrée à coefficients réels, alors elle est aussi à coefficients complexes puisque les réels sont des complexes particuliers. Mais, suivant le choix du corps $\mathbb{K}$, elle ne représente pas (canoniquement) le même endomorphisme. On distinguera donc son **spectre réel**, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$, et son **spectre complexe**, noté $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

Exemple. Avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$, alors que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.

Cas de la dimension finie. On peut utiliser le déterminant pour caractériser les automorphismes (ou les matrices carrées inversibles), on a donc les équivalences (ce sujet sera approfondi ultérieurement avec la notion de **polynôme caractéristique**):

• Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E **de dimension finie**, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \text{ non injectif} \iff u - \lambda\,\mathrm{id}_E \notin \mathrm{GL}(E) \iff \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) = 0\ .$$

• Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A - \lambda I_n) = 0\ .$$

On notera qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Un exemple utile. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $s \in \mathbb{K}$. On suppose que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = s$$

(sur chaque ligne de la matrice A, la somme des coefficients garde une valeur constante s).

Alors $s \in \mathrm{Sp}(A)$, et un vecteur propre de A associé à la valeur propre s est $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Le lecteur vérifiera que $AV = sV$.

Proposition. Deux matrices semblables ont le même spectre. Une matrice carrée et sa transposée ont le même spectre.

Preuve. • *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables, soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Il existe alors un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. Par ailleurs, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. En posant $Y = P^{-1}X$, on a $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, non nul, et*

$$BY = P^{-1}APP^{-1}X = P^{-1}AX = P^{-1}(\lambda X) = \lambda\, P^{-1}X = \lambda Y\ ,$$

donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, et Y est un vecteur propre associé. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathrm{Sp}(B)$. L'inclusion réciproque se traite de la même façon. Le spectre d'une matrice est donc invariant par similitude.

• *Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\det(A - \lambda I_n) = 0$, donc $\det(A^\top - \lambda I_n) = \det\big((A - \lambda I_n)^\top\big) = 0$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\top)$. Réciproque immédiate. Finalement, $\mathrm{Sp}(A^\top) = \mathrm{Sp}(A)$.*

3. Notion de sous-espace propre.

Définition 3. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. On appelle **sous-espace propre** de u associé à la valeur propre λ l'ensemble des vecteurs x de E tel que $u(x) = \lambda x$. On le note $E_\lambda(u)$.

Ainsi, $\boxed{E_\lambda(u) = \big\{x \in E \mid u(x) = \lambda x\big\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)}$.

Comme son nom l'indique, ce SEP (sous-espace propre) est un sous-espace vectoriel de E puisque c'est le noyau d'un endomorphisme.

Le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ, et du vecteur nul 0_E.

Remarque. La notation $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ sera étendue au cas où λ n'est pas valeur propre de u, mais dans ce cas ce sous-espace est réduit à $\{0_E\}$.

Proposition. Si λ est valeur propre de l'endomorphisme u, alors le sous-espace propre $F = E_\lambda(u)$ est stable par u, et l'endomorphisme induit u_F est une homothétie: $u_F = \lambda\,\mathrm{id}_F$.

C'est immédiat!

Proposition. **Si deux endomorphismes u et v de E commutent, alors les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.**

Preuve. Soit λ une valeur propre de u, montrons que $F = E_\lambda(u)$ est stable par v. Soit $x \in F$, alors $u(x) = \lambda x$, puis $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$, on a donc bien $v(x) \in F$, ce qu'il fallait démontrer.

Définition 3bis. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on appelle **sous-espaces propres** de A les sous-espaces propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associés.

Ainsi, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a

$$E_\lambda(A) = \big\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\big\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)\ .$$

On qualifie d'**éléments propres** d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) les valeurs propres et sous-espaces propres de cet endomorphisme (ou matrice). Lorsque l'on demande de déterminer les éléments propres d'un endomorphisme, on listera ses valeurs propres et, pour chaque valeur propre, on précisera le sous-espace propre associé. Pour cela, on pourra écrire l'**équation aux éléments propres** $u(x) = \lambda x$, ou son analogue matricielle $AX = \lambda X$, dont on recherchera les couples (λ, x) ou (λ, X) solutions, avec $x \neq 0_E$ ou $X \neq 0$.

Reprenons les exemples vus dans le paragraphe **I.1.**:

Exemple 1. Pour l'opérateur de dérivation D dans $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, tous les scalaires (complexes) sont valeurs propres et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le sous-espace propre associé est une droite vectorielle

$$E_\lambda(D) = \big\{f \in E \mid f' = \lambda f\big\} = \mathrm{Vect}(x \mapsto e^{\lambda x})\ .$$

Exemple 2. Pour l'opérateur de translation T dans $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, tous les scalaires sont valeurs propres et, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, le sous-espace propre associé est une droite vectorielle

$$E_\lambda(T) = \big\{u = (u_n) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+1} = \lambda u_n\big\} = \mathrm{Vect}\left((\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\ .$$

4. Utilisation de polynômes annulateurs.

Notons d'abord le petit résultat suivant:

Lemme. **Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, soit $x \in E$ un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ. Soit enfin $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. Alors le vecteur x est aussi vecteur propre de l'endomorphisme $P(u)$ associé à la valeur propre $P(\lambda)$. Autrement dit, si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\,x$.**

Preuve. Posons $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a par hypothèse $u(x) = \lambda x$. Par une récurrence immédiate, on montre que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k(x) = \lambda^k x$. Il ne reste plus qu'à faire des combinaisons linéaires pour obtenir

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k\ \lambda^k\ x = \Big(\sum_{k=0}^{d} a_k\ \lambda^k\Big)\ x = P(\lambda)\ x\ ,$$

d'où la conclusion.

On en déduit notamment que, si λ est valeur propre de l'endomorphisme u, alors le scalaire $P(\lambda)$ est valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$. Bien sûr, on peut remplacer l'endomorphisme u par une matrice carrée A dans cette affirmation.

La connaissance d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) donne des informations sur ses valeurs propres:

Proposition. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u. Alors toute valeur propre de u est racine de P. On peut, dans cette affirmation, remplacer l'endomorphisme u par une matrice carrée A.

Preuve. Si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$, mais ici $P(u)$ est l'endomorphisme nul (dont la seule valeur propre est 0). Donc $P(\lambda) = 0$.

L'ensemble des valeurs propres de u est donc inclus dans l'ensemble des zéros du polynôme annulateur P, que nous noterons $\mathcal{Z}(P)$. Si l'espace vectoriel E est de dimension finie (ou si on travaille sur une matrice carrée), on peut utiliser le terme de spectre pour désigner l'ensemble des valeurs propres, on écrira donc:

$$\boxed{\text{Si } P \text{ est un polynôme annulateur de } u, \text{ alors } \mathrm{Sp}(u) \subset \mathcal{Z}(P)}.$$

Attention! Cette inclusion peut être stricte. On le comprend bien si l'on se souvient que tout multiple d'un polynôme annulateur est encore un polynôme annulateur. Par exemple, avec $A = I_n$ pour laquelle $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, le polynôme $X - 1$ est annulateur, mais le polynôme $P = (X-1)(X-2)$ est aussi annulateur avec $\mathcal{Z}(P) = \{1, 2\} \neq \mathrm{Sp}(A)$.

Exemples à connaître.

(1): Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un **projecteur**, alors $p^2 - p = 0$, donc p admet pour polynôme annulateur $P = X^2 - X = X(X-1)$, **les seules valeurs propres possibles de p sont alors 0 et 1**. *On peut préciser que les valeurs propres de p sont exactement 0 et 1, sauf dans deux cas particuliers: $p = 0$ dont la seule valeur propre est 0, et $p = \mathrm{id}_E$ dont la seule valeur propre est 1.*

(2): Si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une **symétrie**, alors $s^2 - \mathrm{id}_E = 0$, donc s admet pour polynôme annulateur $P = X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$, **les seules valeurs propres possibles de s sont alors -1 et 1**. *On peut préciser que les valeurs propres de s sont exactement -1 et 1, sauf dans deux cas particuliers: $s = \mathrm{id}_E$ dont la seule valeur propre est 1, et $s = -\mathrm{id}_E$ dont la seule valeur propre est -1.*

(3): Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est **nilpotent**, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = 0$, donc f admet pour polynôme annulateur $P = X^k$, **la seule valeur propre possible de f est alors 0**. De plus, 0 est effectivement valeur propre de f car, si ce n'était pas le cas, l'endomorphisme f serait injectif, donc f^k le serait aussi (une composée d'applications injectives est injective), ce qui est absurde puisque f^k est l'endomorphisme nul.

Exercice I.4.1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, autrement dit $a_{1,n} = a_{2,1} = a_{3,2} = \cdots = a_{n,n-1} = 1$ et tous les autres coefficients sont nuls. Calculer A^n. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{U}_n$ où $\mathcal{U}_n$ est l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Montrer ensuite que $\mathrm{Sp}(A) = \mathcal{U}_n$ et expliciter les sous-espaces propres de A (considérée comme matrice complexe).

5. <u>Propriétés des sous-espaces propres.</u>

<u>Théorème.</u> Si $u \in \mathcal{L}(E)$, si $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$, avec $1 \leq i \leq m$, sont en somme directe.

On retiendra éventuellement cet énoncé raccourci:

$$\boxed{\textbf{Les sous-espaces propres sont en somme directe}}.$$

<u>Preuve.</u> Supposons que le vecteur nul admette une décomposition **(1):** $0_E = x_1 + \cdots + x_m$ *avec* $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ *pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$. *Pour tout* i, *on a alors* $u(x_i) = \lambda_i x_i$ *et, si* $P \in \mathbb{K}[X]$ *est un polynôme, alors* $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)\,x_i$ *d'après le paragraphe précédent ("lemme"). En appliquant l'endomorphisme* $P(u)$ *à* **(1)**, *on obtient alors la relation* **(2)**: $0_E = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)\,x_i$.

Fixons maintenant un indice $j \in [\![1, m]\!]$, *soit le polynôme de Lagrange* $L_j = \prod_{i \neq j} \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$.

Ce polynôme est tel que $L_j(\lambda_j) = 1$, *et* $L_j(\lambda_i) = 0$ *pour tout* $i \neq j$. *En choisissant* $P = L_j$ *dans la relation* **(2)**, *on obtient* $0_E = \sum_{i=1}^{m} L_j(\lambda_i)\,x_i = x_j$. *Les composantes* x_j *de la décomposition* **(1)** *sont donc toutes nulles, ce qu'il fallait démontrer.*

Deux petits rappels sur la notion de somme directe de m sous-espaces, c'est une notion sur laquelle plusieurs confusions sont fréquentes:

<u>Remarque 1.</u> Je rappelle que "la bonne" démonstration du fait que m sous-espaces sont en somme directe est celle exposée ci-dessus (la seule façon de décomposer le vecteur nul est de prendre toutes les composantes nulles). En effet, dès que $m > 2$, il ne suffit pas de prouver que les intersections deux à deux de ces sous-espaces sont réduites à $\{0_E\}$!

<u>Remarque 2.</u> Je rappelle aussi que dire que m sous-espaces F_i, $1 \leq i \leq m$, sont en somme directe, ne signifie pas que la somme de ces m sous-espaces est l'espace E tout entier, c'est aussi une confusion fréquente!

Le théorème ci-dessus a plusieurs conséquences importantes.

<u>Conséquence 1.</u> Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admet au plus n valeurs propres.

<u>Preuve.</u> Si $\dim(E) = n$, *et si* $u \in \mathcal{L}(E)$ *admet* $n+1$ *valeurs propres distinctes* $\lambda_1, \cdots, \lambda_{n+1}$, *alors chaque sous-espace propre* $E_{\lambda_i}(u)$ *est de dimension au moins 1 (sinon,* λ_i *ne serait pas valeur propre de* u*), et les sous-espaces* $E_{\lambda_i}(u)$, *avec* $1 \leq i \leq n+1$, *sont en somme directe. Alors* $S = \bigoplus_{i=1}^{n+1} E_{\lambda_i}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de* E *et, la somme étant directe,*

$$\dim(S) = \sum_{i=1}^{n+1} \dim\left(E_{\lambda_i}(u)\right) \geq \sum_{i=1}^{n+1} 1 = n + 1 > n = \dim(E)\ ,$$

ce qui est absurde.

Si E est de dimension finie, on a donc

$$\boxed{\text{Card}\left(\text{Sp}(u)\right) \leq \dim(E)}.$$

Bien sûr, une traduction matricielle est:

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors Card}\left(\text{Sp}(A)\right) \leq n}.$$

<u>Conséquence 2.</u> Si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n, alors la somme des dimensions de ses sous-espaces propres vaut au plus n.

<u>Preuve.</u> On sait maintenant que le spectre de u est un ensemble fini, on peut donc indexer par cet ensemble. Soit $S = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$*. On a* $\dim(S) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right)$ *car on sait que la somme est directe. Mais S est un sous-espace de E, donc* $\dim(S) \leq n$*. On obtient bien l'inégalité voulue, à savoir*

$$\boxed{\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) \leq \dim(E)}.$$

Et voici la traduction matricielle:

$$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \text{ alors } \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq n}.$$

Voici une autre formulation du théorème donné au début de ce paragraphe:

<u>Proposition.</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient $x_1, \cdots, x_m$ des vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Alors la famille $(x_1, \cdots, x_m)$ est libre.

<u>Preuve.</u> Soient λ_1, $\cdots$, λ_m les valeurs propres associées aux vecteurs x_1, $\cdots$, x_m respectivement. Soient α_1, $\cdots$, α_m des scalaires. Supposons que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_m x_m = 0_E$*, on dispose alors d'une décomposition du vecteur nul suivant la somme directe* $\bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$*, chaque composante doit donc être nulle, i.e.* $\alpha_i x_i = 0_E$ *pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$*. Mais, pour tout i,* $x_i \neq 0_E$ *puisque c'est un vecteur propre. Donc* $\alpha_i = 0$*, ce qu'il fallait démontrer.*

<u>Exercice I.5.1.</u> On travaille dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Pour tout k entier naturel, soit la fonction $c_k : x \mapsto \cos(kx)$. Montrer que, pour tout n entier naturel, la famille $(c_0, c_1, \cdots, c_n)$ est libre.

b. Pour tout k entier naturel non nul, soit la fonction $s_k : x \mapsto \sin(kx)$. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, la famille $(c_0, c_1, s_1, c_2, s_2, \cdots, c_n, s_n)$ est libre. □

II. Le polynôme caractéristique.

1. Définition et premières propriétés.

Commençons par traiter le cas d'une matrice carrée.

Théorème. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors l'application

$$\chi_A : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \det(xI_n - A) \end{cases}$$

est polynomiale, unitaire de degré n, et le coefficient de x^{n-1} est $-\mathrm{tr}(A)$.

La démonstration se fait par récurrence sur n, mais nécessite un lemme un peu technique.

Lemme. Soient n^2 fonctions polynomiales notées $a_{i,j} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Soit l'application $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{K} \qquad f(x) = \det\big(A(x)\big) = \det\big(a_{i,j}(x)\big) = \begin{vmatrix} a_{1,1}(x) & \cdots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \cdots & a_{n,n}(x) \end{vmatrix} .$$

Alors cette application f est polynomiale, de degré au plus égal à $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \big(\max_{1 \leq i \leq n} \deg(a_{i,j}) \big)$.

Preuve du lemme. Par récurrence sur n aussi. Introduisons d'abord les notations. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on note $A(x)$ la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $a_{i,j}(x)$. Si on fixe un couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on notera $A'_{i,j}(x)$ la matrice carrée d'ordre $n-1$ obtenue à partir de $A(x)$ en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne. Enfin, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, posons $D_j = \max_{1 \leq i \leq n} \deg(a_{i,j})$, c'est le maximum des degrés des fonctions polynomiales situées sur la j-ième colonne de A.

- *Initialisation pour $n = 1$, c'est évident car alors $A(x) = \big(a_{1,1}(x)\big)$, et $f(x) = a_{1,1}(x)$ est polynomiale de degré $D_1 = \deg(a_{1,1})$.*
- *Hérédité. Soit $n \geq 2$, supposons le lemme vrai au rang $n-1$, soit $A(x)$ d'ordre n. On développe le déterminant $f(x)$ par rapport à la dernière colonne:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} \, a_{i,n}(x) \, \det\big(A'_{i,n}(x)\big) .$$

L'hypothèse de récurrence affirme que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, l'application $x \mapsto \det\big(A'_{i,n}(x)\big)$ est polynomiale de degré au plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} D_j$. Comme chaque fonction $a_{i,n}$ est polynomiale de degré au plus D_n, par opérations sur les polynômes, on déduit que f est polynomiale de degré au plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} D_j + D_n = \sum_{j=1}^{n} D_j$, ce qui achève la récurrence.

Preuve du théorème. De nouveau par récurrence sur n donc.

- *Pour $n = 1$, on a $A = (a) \in \mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$, et $\chi_A(x) = \det(xI_1 - A) = x - a = x - \mathrm{tr}(A)$.*
- *Hérédité: supposons la propriété vraie au rang $n-1$ avec $n \geq 2$ donné, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x-a_{1,1} & \cdots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_{n-1,1} & \cdots & x-a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ -a_{n,1} & \cdots & -a_{n,n-1} & x-a_{n,n} \end{vmatrix} .$$

Développons par rapport à la dernière colonne: en posant $B'_{i,j}(x)$ la matrice obtenue à partir de $B(x) = xI_n - A$ en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne, on obtient

$$\textbf{(*)} \qquad \chi_A(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1}\, a_{i,n}\, \det\big(B'_{i,n}(x)\big) + (x - a_{n,n})\, \det\big(B'_{n,n}(x)\big) .$$

Pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, la matrice $B'_{i,n}(x)$ a tous ses coefficients constants (i.e. de degré 0) sur la i-ième colonne, ceux des autres colonnes étant polynomiaux de degré au plus 1, on déduit alors du lemme que l'application $x \mapsto \det\big(B'_{i,n}(x)\big)$ est polynomiale de degré au plus $n-2$. L'application $R : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+n+1}\, a_{i,n}\, \det\big(B'_{i,n}(x)\big)$ est donc polynomiale de degré au plus $n-2$.

D'autre part, $B'_{n,n}(x) = xI_{n-1} - A'_{n,n}$ (notation introduite dans la preuve du lemme), donc $\det\big(B'_{n,n}(x)\big) = \chi_{A'_{n,n}}(x)$. De l'hypothèse de récurrence, on déduit alors que

$$\det\big(B'_{n,n}(x)\big) = x^{n-1} - \operatorname{tr}(A'_{n,n})\, x^{n-2} + S(x) ,$$

où l'application S est polynomiale de degré au plus $n-3$. En reprenant **(*)**, *on a*

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= (x - a_{n,n}) \left(x^{n-1} - \Big(\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i} \Big)\, x^{n-2} + S(x) \right) + R(x) \\ &= x^n - \operatorname{tr}(A)\, x^{n-1} + T(x) , \end{aligned}$$

où T est polynomiale de degré au plus $n-2$. C'est ce que l'on souhaitait obtenir au rang n pour achever la récurrence.

Conformément au programme, le corps $\mathbb{K}$ est, soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$, c'est donc un ensemble infini, ce qui permet de confondre polynôme et application polynomiale associée.

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \det(xI_n - A)$ est appelé **polynôme caractéristique** de la matrice A, et noté χ_A.

Il est donc caractérisé par sa relation de définition:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K} \qquad \chi_A(x) = \det(xI_n - A)}.$$

Son coefficient constant est $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n\, \det(A)$. En réunissant les informations dont nous disposons, nous pouvons écrire une forme développée du polynôme caractéristique de la matrice A:

$$\boxed{\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\, \det(A)}.$$

Bien sûr, tout n'est pas explicité. Les termes "intermédiaires" (remplacés par des points de suspension) font intervenir des coefficients dont l'interprétation est moins évidente et que nous n'étudierons pas.

Exemple fondamental. Pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\chi_A(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-a & -b \\ -c & x-d \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad - bc)\ ,$$

donc

$$\boxed{\text{si } A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}), \text{ alors } \chi_A = X^2 - \operatorname{tr}(A)\, X + \det(A)}.$$

Exemple fondamental aussi. Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure ou inférieure, alors

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{i,i})\ .$$

Cela résulte tout simplement du fait que le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

Preuve. Si A et B, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, sont semblables, on a $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, donc pour tout scalaire x, on a $xI_n - B = P^{-1}(xI_n - A)P$, i.e. les matrices $xI_n - A$ et $xI_n - B$ sont elles aussi semblables, donc elles ont le même déterminant. Le polynôme caractéristique est donc invariant par similitude.

Proposition. Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit $x \in \mathbb{K}$. Alors

$$\chi_{A^\top}(x) = \det(xI_n - A^\top) = \det\left((xI_n - A)^\top\right) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x)\ ,$$

puisqu'une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Nous pouvons maintenant définir le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie.

Définition. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors le polynôme caractéristique de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$, on l'appelle **polynôme caractéristique** de l'endomorphisme u, et on le note χ_u.

En effet, si $\mathcal{B}'$ est une autre base de E, alors les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont semblables donc elles ont le même polynôme caractéristique.

On a, bien sûr,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{K} \qquad \chi_u(x) = \det(x\,\mathrm{id}_E - u)}.$$

Si $\dim(E) = n$, le polynôme caractéristique χ_u est unitaire de degré n, et plus précisément,

$$\boxed{\chi_u = X^n - \operatorname{tr}(u)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\ \det(u)}.$$

2. Lien avec les valeurs propres.

Proposition. **Les valeurs propres d'une matrice carrée (ou d'un endomorphisme en dimension finie) sont exactement les racines de son polynôme caractéristique.**

En effet, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \lambda I_n - A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \iff \chi_A(\lambda) = 0$.

On a donc $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \mathcal{Z}(\chi_A)}$ ou $\boxed{\mathrm{Sp}(u) = \mathcal{Z}(\chi_u)}$.

De ce résultat, on tire quelques conséquences importantes:

Conséquence 1. **Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.**

En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *est triangulaire, alors* $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - a_{i,i})$.

Conséquence 2. **Une matrice carrée d'ordre n (ou un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n) a au plus n valeurs propres.**:

$$\mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(A)\big) \leq n \ \text{ si } \ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ , \quad \text{ou bien} \quad \mathrm{Card}\big(\mathrm{Sp}(u)\big) \leq \dim(E) \ \text{ si } \ u \in \mathcal{L}(E) \ .$$

On a déjà obtenu ce résultat dans le paragraphe **I.5.**, *on le retrouve ici en disant qu'un polynôme de degré n admet au plus n racines.*

Conséquence 3. **Une matrice carrée a au moins une valeur propre complexe, un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie a au moins une valeur propre.**

C'est une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss qui affirme que tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Attention! Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension infinie peut n'avoir aucune valeur propre, c'est le cas par exemple de l'endomorphisme Φ de $\mathbb{C}[X]$ défini par $\Phi(P) = XP$.

Conséquence 4. **Une matrice carrée réelle d'ordre impair a au moins une valeur propre réelle, un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire a au moins une valeur propre.**

C'est une conséquence du fait que tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet au moins une racine réelle. On peut retrouver ce résultat du cours de 1ère année, soit en passant par la factorisation du polynôme en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, soit en appliquant une généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à la fonction polynomiale associée sur $\mathbb{R}$ (elle est continue, et elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$, et vers $+\infty$ en $+\infty$).

3. Notion de multiplicité d'une valeur propre.

Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre d'une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ou d'un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On appelle **multiplicité** de cette valeur propre sa multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique χ_A ou χ_u.

On note souvent m_λ cette multiplicité. On a donc

$$(X-\lambda)^{m_\lambda} | \chi_A \ , \quad \text{et} \quad (X-\lambda)^{m_\lambda+1} \nmid \chi_A \ ,$$

ou encore $\chi_A = (X-\lambda)^{m_\lambda}\, Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$.

Proposition. **Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, soit F un s.e.v. de E stable par u, notons u_F l'endomorphisme induit. Alors $\chi_{u_F}|\chi_u$: le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit divise le polynôme caractéristique de u.**

Preuve. *Notons n et p les dimensions de E et F respectivement, soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_p,e_{p+1},\cdots,e_n)$ une base de E adaptée à F. On sait que la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, de la forme $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ avec $A\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $D\in\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$. Alors, pour $x\in\mathbb{K}$, $xI_n-M=\begin{pmatrix} xI_p-A & -B \\ 0 & xI_{n-p}-D \end{pmatrix}$, et un calcul de déterminants par blocs donne*

$$\chi_M(x)=\det(xI_n-M)=\det(xI_p-A)\ \det(xI_{n-p}-D)=\chi_A(x)\,\chi_D(x)\ .$$

On a donc l'identité $\chi_M=\chi_A\,\chi_D$ dans $\mathbb{K}[X]$ et, comme $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u_F)$ avec $\mathcal{C}=(e_1,\cdots,e_p)$, on a $\chi_M=\chi_u$ et $\chi_A=\chi_{u_F}$. On a bien prouvé que le polynôme caractéristique de u_F divise celui de u.

Proposition. **Soit $\lambda\in\mathbb{K}$ une valeur propre d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie, soit m_λ sa multiplicité. On a alors l'encadrement**

$$\boxed{1\leq\dim\big(E_\lambda(u)\big)\leq m_\lambda}.$$

Même chose en remplaçant u par une matrice carrée A.

Preuve. *Posons $F=E_\lambda(u)$, et $d=\dim(F)$.*

L'inégalité de gauche ($d\geq 1$) exprime simplement le fait que λ est valeur propre de u.

On sait que F est stable par u et que l'endomorphisme induit est une homothétie: $u_F=\lambda\,\mathrm{id}_F$. L'endomorphisme u_F est donc représenté (dans n'importe quelle base de F) par la matrice λI_d, et son polynôme caractéristique est $\chi_{u_F}=(X-\lambda)^d$. La proposition précédente nous dit que $(X-\lambda)^d\mid\chi_u$, ce qui signifie précisément que la multiplicité de la valeur propre λ est au moins égale à d, on a donc prouvé l'inégalité de droite.

Conséquence. Si $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre simple de u, i.e. si $m_\lambda=1$, alors le sous-espace propre associé est une droite.

Exercice II.3.1. Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a bien sûr $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$.

Déterminer la multiplicité m_1 et la dimension du sous-espace propre $E_1(A)$.

4. **Expression du déterminant et de la trace.**

Proposition. **Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors le déterminant de A est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, et la trace de A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, ce qui s'écrit**

$$\boxed{\det(A)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\lambda^{m_\lambda}}\qquad\qquad\boxed{\mathrm{tr}(A)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}m_\lambda\,\lambda}.$$

Remarque 1. Ceci s'applique bien sûr aussi à un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$. Cette dernière condition est toujours satisfaite si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ d'après le théorème de d'Alembert-Gauss.

Remarque 2. J'ai fait le choix, dans l'énoncé de la proposition d'indexer par le spectre de A qui est un ensemble fini. On peut aussi indexer les valeurs propres, et il y a alors deux choix d'écritures possibles:

- "avec répétition": si χ_A est scindé, il y a n valeurs propres en tenant compte des multiplicités, que l'on peut noter $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (ainsi une valeur propre double apparaît deux fois dans cette énumération, etc.), les formules s'écrivent alors

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ .$$

- "sans répétition": il y a k valeurs propres **distinctes** que l'on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, et chaque valeur propre λ_i a une multiplicité m_i. Si χ_A est scindé, on a alors $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. Les formules deviennent

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_i^{m_i} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{k} m_i \, \lambda_i \ .$$

Preuve de la proposition. *Indexons les valeurs propres "avec répétition", i.e. notons-les $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (alors non nécessairement distinctes), nous disposons alors de deux écritures du polynôme caractéristique de A:*

- *développée* **(1):** $\chi_A = X^n - \operatorname{tr}(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$;

- *factorisée* **(2):** $\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n)$.

En redéveloppant l'écriture factorisée **(2)**, *on voit que le coefficient de X^{n-1} est $-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, et que le coefficient constant $\chi_A(0)$ vaut $(-1)^n \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.*

En identifiant avec l'écriture développée, on conclut.

III. <u>Diagonalisation en dimension finie.</u>

Dans tout ce paragraphe, la lettre E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie.**

1. <u>Notion de matrice (ou endomorphisme) diagonalisable.</u>

<u>**Définition 1.**</u> Un endomorphisme u de E est dit **diagonalisable** (en abrégé: DZ) s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.

Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, et si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une "base de diagonalisation" de u, i.e. si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ est diagonale, alors on a $u(e_i) = \lambda_i e_i$, les vecteurs e_i constituant la base $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de u. La réciproque est immédiate (si une base $\mathcal{B}$ est constituée de vecteurs propres de u, alors la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$ est diagonale). On a ainsi une reformulation de la définition 1:

<u>**Caractérisation.**</u> **Un endomorphisme u de E est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.**

Une telle base pourra être appelée "base propre" ou encore "base de diagonalisation" pour u.

<u>**Définition 2.**</u> Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** (ou: DZ) si elle est semblable à une matrice diagonale.

C'est en fait la même notion puisque la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable. Précisons: on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et si on suppose A diagonalisable, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale. La matrice inversible P peut être interprétée comme matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ constituée des vecteurs-colonnes de P. On a alors (*cf.* effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = D$, et l'endomorphisme u est bien diagonalisable. La réciproque est immédiate. On retiendra donc:

<u>**Diagonalisation effective.**</u> **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. On a alors la relation**

$$A = PDP^{-1} ,$$

où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A (indexées "avec répétition"), et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^n$ vers une base constituée de vecteurs propres de u (pour les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ dans le même ordre).

<u>**Attention!**</u> Une matrice réelle peut être diagonalisable sur $\mathbb{C}$, mais ne pas être diagonalisable sur $\mathbb{R}$, c'est le cas de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, que nous avons déjà rencontrée, et qui est telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$. Sur $\mathbb{C}$, une diagonalisation effective de cette matrice est d'écrire la relation $A = PDP^{-1}$, avec $D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$.

<u>**Exemples usuels.**</u> Certains endomorphismes remarquables sont toujours diagonalisables (en dimension finie), par exemple les homothéties, les projecteurs et les symétries. En effet:

- une homothétie est de la forme $u = \lambda\,\mathrm{id}_E$, et elle est représentée dans toute base de E par la matrice scalaire (donc diagonale) λI_n, si n est la dimension de E ;

- si p est un projecteur, on a $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, et on a vu que, si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui est diagonale ;

- si s est une symétrie, on a $E = F \oplus G$, avec $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = E_1(s)$ espace des vecteurs invariants, et $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E_{-1}(s)$ espace des vecteurs anti-invariants, et si $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à cette décomposition, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$ qui est une matrice diagonale.

Exemple. Dans $E = \mathbb{K}[X]$, l'endomorphisme Φ défini par $\Phi(P) = XP'$, est diagonalisable. En effet, la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ est constituée de vecteurs propres puisque $\Phi(X^k) = kX^k$ pour tout k.

Exercice III.1.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Cette matrice se diagonalise sans calculs! À vous de jouer!

2. **Une condition suffisante.**

Proposition. Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Preuve. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres et, pour chaque entier $i \in [\![1, n]\!]$, choisissons un vecteur propre e_i associé à la valeur propre λ_i. La famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est constituée de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, elle est donc libre. Comme elle est de cardinal n, c'est une base de E. Il existe donc une base de E constituée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Remarque. Dans cette situation, le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples: $\chi_u = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$. Et inversement, si le polynôme caractéristique d'un endomorphisme u de E est scindé à racines simples, alors cet endomorphisme admet n valeurs propres distinctes, avec $n = \dim(E) = \deg(\chi_u)$, et cet endomorphisme u est alors diagonalisable.

Remarque. Dans la situation ci-dessus, les sous-espaces propres de u sont tous des droites vectorielles. *En effet, chaque sous-espace propre est de dimension au moins égale à 1, et la somme de leurs dimensions ne peut dépasser* $\dim(E) = n$.

Attention! Cette condition n'est pas suffisante! Par exemple, l'endomorphisme nul est évidemment diagonalisable, alors qu'il admet une seule valeur propre qui est 0.

Traduction matricielle. Une matrice carrée d'ordre n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable. Une matrice carrée dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples est diagonalisable.

Exemple. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ (de dimension $n+1$), soit φ l'endomorphisme de E défini par

$$\forall P \in E \qquad \varphi(P) = P + (X - 1)\, P' \ .$$

On s'assure d'abord que φ est bien un endomorphisme de E, puis on construit sa matrice M relativement à la base canonique $\mathcal{B}_0 = (1, X, \cdots, X^n)$ de E. On s'aperçoit que M est triangulaire supérieure, et que ses coefficients diagonaux sont les entiers 1, 2, $\cdots$, $n+1$. Donc

$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(M) = \{1, 2, \cdots, n+1\} = [\![1, n+1]\!] \ ,$$

et φ admet $n+1$ valeurs propres distinctes, donc φ est diagonalisable.

3. **Conditions nécessaires et suffisantes portant sur les sous-espaces propres.**

Théorème 1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si on a

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \ .$$

Traduction matricielle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) si et seulement si on a

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(u)} E_\lambda(A) \ .$$

Remarque importante. On a vu dans le paragraphe **I.5.** que **les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont toujours en somme directe. Ce qui caractérise les endomorphismes diagonalisables est le fait que leur somme soit l'espace E tout entier.** Ainsi, un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si tout vecteur de E peut s'écrire comme une somme de vecteurs propres de u.

Preuve du théorème 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, notons $S = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, soit $n = \dim(E)$. Alors S est un s.e.v. de E.

Si $S = E$, alors en notant $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ les valeurs propres distinctes de u, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i}(u)$ et, si l'on considère une base de E adaptée à cette décomposition, c'est une base de E constituée de vecteurs propres de u, donc u est diagonalisable.

Inversement, si E est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E constituée de vecteurs propres de u. Ces vecteurs sont alors tous dans S. Comme S est un s.e.v. de E contenant une famille libre de cardinal n, on a $\dim(S) \geq n = \dim(E)$, donc $S = E$.

Théorème 2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors u est diagonalisable si et seulement si on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E) \ .$$

Cette CNS se lit donc: "la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace".

Traduction matricielle. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Alors A est diagonalisable (sur $\mathbb{K}$) si et seulement si on a

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(u)} \dim\big(E_\lambda(A)\big) = n \ .$$

<u>Preuve du théorème 2.</u> C'est une conséquence immédiate du théorème 1 puisque, les sous-espaces propres étant toujours en somme directe, on a, en considérant toujours le sous-espace S de E défini par $S = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$:

$$u \textit{ diagonalisable} \iff S = E \iff \dim(S) = \dim(E) \iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\big(E_\lambda(u)\big) = \dim(E)\ .$$

<u>Une conséquence.</u> Un endomorphisme u ayant une seule valeur propre est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie. *En effet, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que* $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$. *Pour cet endomorphisme, on a $S = E_\lambda(u)$, donc u est diagonalisable si et seulement si* $\dim(S) = \dim(E)$, *ou encore si et seulement si $S = E$, ce qui équivaut ici à la condition* $u = \lambda\,\mathrm{id}_E$. Traduction matricielle: une matrice carrée A d'ordre n ayant une seule valeur propre est diagonalisable si et seulement si c'est une matrice scalaire, i.e. $A = \lambda I_n$.

<u>Théorème 3.</u> Un endomorphisme (ou une matrice carrée) est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur le corps de base $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre.

Donc, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on a:

$$\boxed{u \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \quad \dim\big(E_\lambda(u)\big) = m_\lambda \end{cases}}$$

<u>Preuve.</u> • Supposons u diagonalisable, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ ses valeurs propres distinctes et $d_1, \cdots, d_k$ les dimensions des sous-espaces propres associés. On sait alors que $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$ et que $n = \dim(E) = \sum_{i=1}^{k} d_i$. Dans une base adaptée à la décomposition de E en les sous-espaces propres de u, la matrice de u est diagonale, mais on peut aussi la décrire comme diagonale par blocs:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_k I_{d_k})\ .$$

On a alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{d_i}$, ce qui montre que χ_u est scindé et que chaque $d_i = \dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big)$ est aussi la multiplicité de la valeur propre λ_i.

• Réciproquement, si χ_u est scindé, alors $\chi_u = \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i}$, où $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sont les valeurs propres distinctes de u et $m_1, \cdots, m_k$ leurs multiplicités. On a alors les égalités $n = \dim(E) = \deg(\chi_u) = \sum_{i=1}^{k} m_i$. Si l'on fait de plus l'hypothèse que les multiplicités coïncident avec les dimensions des sous-espaces propres, on a donc $\sum_{i=1}^{k} \dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big) = n$, et ceci montre que u est diagonalisable d'après le théorème 2.

Exercice III.3.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. À quelles conditions sur a, b, c, d, e, f cette matrice est-elle diagonalisable ? Même question avec $B = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Diagonalisation et polynômes annulateurs.

Théorème de Cayley-Hamilton. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme (ou d'une matrice carrée) est un polynôme annulateur de cet endomorphisme (ou de cette matrice).

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie, on a donc, dans $\mathcal{L}(E)$, la relation $\chi_u(u) = 0$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la relation $\chi_A(A) = 0$.

Preuve non exigible.

Commentaires. Il faut se garder de confondre ces deux notions. Toute matrice carrée d'ordre n a **un** polynôme caractéristique (qui est de degré n), mais a une infinité de polynômes annulateurs (et le polynôme caractéristique est donc l'un d'eux).

Une conséquence possible (mais je conseille de procéder autrement pour prouver ce résultat): si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente (i.e. $\exists k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = 0$), alors $A^n = 0$. *En effet, si A est nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, donc $\chi_A = X^n$ puisqu'il est unitaire, de degré n, scindé, avec 0 comme seule racine, il n'y a pas trop de choix! Donc $A^n = \chi_A(A) = 0$.*

Et voici encore une **CNS** de diagonalisabilité, utilisant des polynômes annulateurs:

Théorème 1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors u (ou A) est diagonalisable si et seulement si il (ou elle) admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Preuve. Le sens direct est facile. Si u est diagonalisable, admettant comme valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, alors le polynôme $P = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ est scindé à racines simples et il annule u. En effet, l'endomorphisme u est représenté, dans une certaine base de E, par la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_k I_{d_k})$ où $d_1, \cdots, d_k$ sont les multiplicités des valeurs propres et aussi les dimensions des sous-espaces propres. Un calcul immédiat montre que $(D - \lambda_1 I_n) \cdots (D - \lambda_k I_n) = 0$, donc le polynôme P annule la matrice D et donc annule aussi l'endomorphisme u. En changeant de notations, on a montré que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors le polynôme $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$, qui est scindé à racines simples, est un polynôme annulateur de u.

Réciproquement, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P scindé à racines simples, soit $P = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ avec les λ_i scalaires distincts. Pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, soit le polynôme de Lagrange $L_j = \prod_{i \neq j} \left(\dfrac{X - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i} \right)$. Soit $x \in E$, posons $x_j = L_j(u)(x)$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$, alors $x_j \in E_{\lambda_j}(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_j \, \mathrm{id}_E)$ puisque

$$(u-\lambda_j \operatorname{id}_E)(x_j) = \big((u-\lambda_j\ \operatorname{id}_E)\circ L_j(u)\big)(x) = \big((X-\lambda_j)L_j\big)(u)\,(x) = 0_E$$

étant donné que le polynôme $(X-\lambda_j)L_j$, égal à P à un facteur constant non nul près, est annulateur de u. Enfin, la relation $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} L_j = 1$ dans $\mathbb{K}[X]$ entraîne $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} L_j(u) = \operatorname{id}_E$ dans $\mathcal{L}(E)$ et, en l'appliquant au vecteur x, on obtient $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} x_j$. On a ainsi montré que tout vecteur x de E se décompose en une somme de vecteurs propres de u, ce qui signifie que u est diagonalisable.

Attention! Je mets en garde contre une mauvaise utilisation de ce théorème: si on dispose d'un polynôme P annulateur de u et que **ce** polynôme P n'est pas scindé à racines simples, on ne peut pas en conclure que u n'est pas diagonalisable. En effet, l'endomorphisme u peut admettre un autre polynôme annulateur Q qui, lui, est scindé à racines simples!

Et une dernière **CNS** de diagonalisablilité:

Théorème 2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ou $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors u (ou A) est diagonalisable si et seulement si il (ou elle) admet $\displaystyle\prod_{\lambda\in \operatorname{Sp}(u)} (X-\lambda)$ pour polynôme annulateur.

Preuve. Le sens direct a déjà été prouvé, cf. théorème 1. Quant au sens indirect, c'est une conséquence immédiate du théorème 1 puisque le polynôme $\displaystyle\prod_{\lambda\in \operatorname{Sp}(u)} (X-\lambda)$ est scindé à racines simples.

Exercice III.4.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. En utilisant le théorème 2, donner une CNS sur les coefficients a, b, c pour que A soit diagonalisable. $\square$

Exercice III.4.2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, avec $\operatorname{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une racine carrée de A, i.e. une matrice telle que $M^2 = A$. Montrer que M est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$). $\square$

Conséquence. L'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace vectoriel stable est aussi diagonalisable.

Preuve. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ supposé diagonalisable, soit F un s.e.v. de E stable par u, soit u_F l'endomorphisme induit. D'après le théorème 1 (sens direct), il existe un polynôme P, scindé à racines simples, tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$. On a alors $P(u_F) = \big(P(u)\big)_F = 0_{\mathcal{L}(F)}$. En utilisant le théorème 1 dans le sens indirect, on déduit que u_F est aussi diagonalisable.

Exercice III.4.3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ deux matrices carrées, soit $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables. $\square$

Solution. Supposons A et B diagonalisables, alors il existe $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = QDQ^{-1}$ et $B = RER^{-1}$ avec $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $E \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ diagonales. Posons alors $S = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$, il est clair que $S \in \mathrm{GL}_{n+p}(\mathbb{K})$ et que $S^{-1} = \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$.

Un calcul par blocs montre que $S\Delta S^{-1} = M$, où $\Delta = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ est diagonale, donc M est diagonalisable.

Réciproquement, si M est diagonalisable, il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, scindé à racines simples, tel que $P(M) = 0_{n+p}$. Un calcul classique montre par ailleurs que $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & 0 \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$. On a donc $P(A) = 0_n$ et $P(B) = 0_p$, ce qui implique que A et B sont diagonalisables puisque le polynôme P est scindé à racines simples.

Exercice III.4.4*. Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que u et v sont diagonalisables et qu'ils commutent. Montrer que u et v sont "simultanément diagonalisables", i.e. il existe une base de E constituée de vecteurs propres communs à u et à v. En déduire que $u + v$ et $u \circ v$ sont diagonalisables. $\square$

IV. Trigonalisation.

Cette notion sera moins approfondie que la diagonalisation.

Définition 1. Un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit **trigonalisable** (en abrégé: TZ) s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Remarque. On peut remplacer "triangulaire supérieure" par "triangulaire inférieure" sans changer la définition. En effet, si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure avec $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ est triangulaire inférieure si l'on choisit $\mathcal{B}' = (e_n, \cdots, e_1)$. Les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ sont "centrosymétriques" l'une par rapport à l'autre, le lecteur écrira les détails.

Définition 2. Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** (ou: TZ) si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure (ici aussi, on peut choisir triangulaire inférieure)

C'est en fait la même notion puisque la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est trigonalisable. Précisons: on a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, et si on suppose A trigonalisable, on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure. La matrice inversible P peut être interprétée comme matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ vers la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ constituée des vecteurs-colonnes de P. On a alors (*cf.* effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$, et l'endomorphisme u est bien trigonalisable. La réciproque est immédiate.

La **trigonalisation effective** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est-à-dire la recherche d'une matrice inversible P et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $A = PTP^{-1}$ est moins simple à interpréter que la diagonalisation, les vecteurs-colonnes de P (i.e. les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans laquelle u est représenté par T) ne sont plus ici des vecteurs propres de u (sauf le premier). Aucune technique générale de trigonalisation n'est au programme, des indications de méthode doivent vous être fournies le cas échéant. Bien souvent, l'énoncé propose une "réduite triangulaire" T, et il ne reste plus qu'à savoir justifier que A est semblable à cette matrice T.

Exercice IV.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
$\square$

Remarque 1. Il est intéressant de remarquer que, si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, si $u \in \mathcal{L}(E)$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sous-espace $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ est stable par u. Si $\dim(E) = n$, un endomorphisme u de E est donc trigonalisable si et seulement s'il existe une suite $(F_1, \cdots, F_n)$ de s.e.v. de E stables par u, avec $\dim(F_k) = k$ pour tout k et la suite d'inclusions $F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_{n-1} \subset F_n = E$.

Exemple classique. Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$, soit φ un endomorphisme de E "diminuant le degré" des polynômes, i.e. tel que $\forall P \in E \quad \deg\big(\varphi(P)\big) \leq \deg(P)$. Alors φ est trigonalisable. En effet, on vérifie facilement que la matrice de φ relativement à la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ est triangulaire supérieure, ou bien on constate que les s.e.v. emboîtés $\mathbb{K}_1[X] \subset \cdots \subset \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X]$ sont stables par φ.

Remarque 2. Pour manipuler les endomorphismes trigonalisables, il est intéressant de savoir manipuler les matrices triangulaires. Alors voici quelques rappels: si l'on note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n, alors $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$, une base étant constituée des matrices élémentaires $E_{i,j}$, avec $1 \leq i \leq j \leq n$. Cet ensemble est de plus stable par produit (*on peut le démontrer en travaillant sur les coefficients, ou bien en interprétant en termes de sous-espaces stables, cf. ci-dessus*). Si l'on multiplie entre elles deux matrices triangulaires supérieures, alors les coefficients diagonaux se multiplient deux à deux: si ce n'est pas clair, voici un schéma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}.$$

Une matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et, si c'est le cas, son inverse est aussi triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux inverses, autrement dit:

$$\text{si } \prod_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0\,, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & \alpha_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1} & & (\times) \\ & \ddots & \\ (0) & & \dfrac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}.$$

Enfin, les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux. En conséquence, si une matrice A est trigonalisable: $A = PTP^{-1}$, les valeurs propres de la matrice A sont les coefficients diagonaux de sa réduite triangulaire T.

Il y a au programme un théorème essentiel à connaître:

Théorème. Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie (ou une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve non exigible.

<u>Conséquence.</u> Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, ou bien tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, est trigonalisable.

<u>Un exemple à connaître.</u> Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente, alors elle est semblable à une matrice "triangulaire supérieure stricte" i.e. avec des coefficients diagonaux nuls. En effet, comme $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, elle est trigonalisable, et sa seule valeur propre est 0.

On peut reformuler un théorème déjà énoncé dans le paragraphe **II.4.** en disant

<u>Proposition.</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, <u>supposé trigonalisable</u>. Alors le déterminant de u est égal au produit de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, et la trace de u est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leurs multiplicités, ce qui s'écrit

$$\boxed{\det(u) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda}} \qquad \boxed{\mathrm{tr}(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda\, \lambda}\,.$$

Une preuve de Cayley-Hamilton dans le cas trigonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, où E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Il existe donc une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E dans laquelle u est représenté par une matrice triangulaire supérieure T. Notons λ_1, $\cdots$, λ_n les coefficients diagonaux de T, qui sont les valeurs propres de u. On a alors $\chi_u = \chi_T = \prod_{k=1}^{n}(X - \lambda_k)$. Considérons enfin les sous-espaces $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ de E $(1 \leq k \leq n)$, soit $F_0 = \{0_E\}$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, observons la matrice $T - \lambda_k I_n$: sur ses k premières colonnes, les coefficients des lignes indexées de k à n sont nuls, cela signifie que les vecteurs $(u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)(e_1)$, $\cdots$, $(u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)(e_k)$ sont dans F_{k-1}, et donc que $(u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)(F_k) \subset F_{k-1}$. On a ainsi $(u - \lambda_n\,\mathrm{id}_E)(E) = (u - \lambda_n\,\mathrm{id})(F_n) \subset F_{n-1}$, puis

$$\big((u - \lambda_{n-1}\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_n\,\mathrm{id}_E)\big)(E) \subset (u - \lambda_{n-1}\,\mathrm{id}_E)(F_{n-1}) \subset F_{n-2}\ .$$

Par une récurrence descendante, on obtient, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'inclusion

$$\big((u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_{k+1}\,\mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n\,\mathrm{id}_E)\big)(E) \subset F_{k-1}$$

et, pour $k = 1$, on déduit que $(u - \lambda_1\,\mathrm{id}_E) \circ (u - \lambda_2\,\mathrm{id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_n\,\mathrm{id}_E) = \prod_{k=1}^{n}(u - \lambda_k\,\mathrm{id}_E)$ est l'endomorphisme nul, ce qui s'écrit $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

V. <u>Applications de la réduction.</u>

1. <u>Calculs de puissances de matrices.</u>

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si on diagonalise ou trigonalise A, on écrit alors $A = PRP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice "réduite", i.e. diagonale ou triangulaire selon les cas. Une récurrence immédiate donne $A^k = PR^kP^{-1}$ pour tout k entier naturel. On est donc ramené à calculer R^k.

- si R est diagonale: $R = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, c'est immédiat, on a alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad R^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k)\ .$$

- si R est triangulaire, le calcul est moins immédiat, mais il est souvent possible de décomposer R en $R = D + N$ avec D diagonale et N nilpotente **qui commutent**. Supposons que ce soit le cas avec N nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$, i.e. $N^{p-1} \neq 0$ et $N^p = 0$. Comme D et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme:

$$R^k = (D+N)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{k}{j} D^{k-j} N^j \ ,$$

il n'y a donc qu'un nombre limité (p) de termes à calculer.

__**Exemple 1.**__ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculons A^k pour $k \in \mathbb{N}$. *Les détails de calculs ne seront pas développés.* On calcule $\chi_A = X(X-1)(X-2)$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1, 2\}$. Comme A a trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec $D = \mathrm{diag}(0, 1, 2)$, on obtient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ en recherchant des vecteurs propres. On calcule aussi $P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et on effectue le produit $A^k = PD^kP^{-1}$. Cela donne

$$A^k = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^{k-1} + (-1)^k & 2^{k-1} + 2\,(-1)^{k-1} & 2^{k-1} + (-1)^k \\ 2^k + (-1)^{k-1} & 2^k + 2\,(-1)^k & 2^k + (-1)^{k-1} \\ 3 \times 2^{k-1} & 3 \times 2^{k-1} & 3 \times 2^{k-1} \end{pmatrix} \ .$$

__**Exemple 2.**__ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, calculons A^k pour $k \in \mathbb{N}$. On calcule $\chi_A = (X-2)(X-1)^2$, donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$. La valeur propre 1 est double, mais le sous-espace propre $E_1(A)$ est de dimension 1, donc A n'est pas diagonalisable. On la trigonalise alors (*pour cela, normalement des indications de méthode doivent vous être fournies, on peut par exemple vous demander de prouver que A est semblable à une matrice T donnée*). Par exemple, $A = PTP^{-1}$ avec

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \ , \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \ .$$

On observe alors que $T = D + N$, avec $D = \mathrm{diag}(2, 1, 1)$ et $N = E_{2,3}$, ces deux matrices commutant puisque $DN = ND = N$, et N étant nilpotente d'indice 2 ($N^2 = 0$). La formule du binôme donne alors simplement

$$T^k = D^k + kND^{k-1} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ .$$

Enfin, un dernier calcul donne

$$A^k = P\,T^k\,P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^k-2k & 2^k-1 & -2^k+2k+1 \\ 2^k-1 & 2^k & -2^k+1 \\ 2^k-2k-1 & 2^k-1 & -2^k+2k+2 \end{pmatrix} .$$

<u>Remarque.</u> Pour calculer des puissances (ou des inverses) de matrices, on peut aussi utiliser un polynôme annulateur (par exemple le polynôme caractéristique, mais il y a parfois des polyômes annulateurs de plus petit degré).

Il est maintenant légitime de se poser une question: à quoi ça sert de calculer des puissances de matrices ? La réponse sera donnée dans le prochain épisode.

2. <u>Suites vectorielles satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre 1.</u>

Je me contente de proposer un exemple: on considère trois suites réelles (u_n), (v_n), (w_n) données par l'initialisation $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, et les relations de récurrence simultanées:

$$\textbf{(*)} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n + 2v_n - w_n \\ w_{n+1} &= -u_n + v_n + 2w_n \end{cases} .$$

On cherche une expression directe de u_n, v_n et w_n en fonction de l'entier n.

Pour cela, posons $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ pour tout n, en particulier $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Les relations **(*)** peuvent se traduire par $\forall n \in \mathbb{N} \quad X_{n+1} = AX_n$, où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice introduite dans l'exemple précédent. On en déduit immédiatement que $X_n = A^n X_0$ pour tout n. Le calcul des puissances de la matrice A nous donnera donc la réponse. Comme X_0 est le premier vecteur de la base canonique, X_n est la première colonne de la matrice A^n. En reprenant le calcul fait plus haut, on conclut que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_n &= 2^n - 2n \\ v_n &= 2^n - 1 \\ w_n &= 2^n - 2n - 1 \end{cases} .$$

3. <u>Suites scalaires satisfaisant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux.</u>

Soient a et b deux scalaires avec $b \neq 0$. Soit la relation de récurrence linéaire

$$\textbf{(R)} : \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n ,$$

où $u = (u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si on introduit la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{n+1}$, la relation de récurrence **(R)** peut se traduire par le système

$$\textbf{(S)} : \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} u_{n+1} &= v_n \\ v_{n+1} &= a\,v_n + b\,u_n \end{cases} .$$

Réciproquement, si un couple (u, v) de suites scalaires vérifie **(S)**, alors la suite u vérifie **(R)**. En posant $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour tout n, et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}$, on a alors $X_{n+1} =$

AX_n pour tout n, donc $X_n = A^n X_0$, et on est ramené au type d'étude faite dans le paragraphe précédent. On note que $\chi_A(r) = \begin{vmatrix} r & -1 \\ -b & r-a \end{vmatrix} = r^2 - ar - b$. Ce que vous aviez l'habitude d'appeler **équation caractéristique (C):** $r^2 - ar - b = 0$ pour résoudre ce type de récurrence linéaire est donc l'équation $\chi_A(r) = 0$, où χ_A est le polynôme caractéristique de la matrice A. Si on se place sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, en posant $\Delta = a^2 + 4b$, on retrouve la discussion:

- si $\Delta \neq 0$, l'équation caractéristique **(C)** admet deux racines distinctes r_1 et r_2, donc la matrice A admet deux valeurs propres distinctes r_1 et r_2, elle est donc diagonalisable, et plus précisément semblable à $D = \mathrm{diag}(r_1, r_2)$, posons $A = PDP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Alors $A^n = PD^nP^{-1}$ avec $D^n = \mathrm{diag}(r_1^n, r_2^n)$. Les suites (u_n) et (v_n), qui sont les coefficients de la matrice-colonne $X_n = PD^nP^{-1}X_0$ s'expriment alors comme combinaisons linéaires des suites géométriques (r_1^n) et (r_2^n). Par ailleurs, il résulte du principe de récurrence que l'ensemble $\mathcal{R}$ des suites satisfaisant la relation de récurrence **(R)** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de dimension 2 (*cf.* poly sur les suites numériques). On vient de prouver l'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathrm{Vect}\big((r_1^n), (r_2^n)\big)$. Par égalité des dimensions, $\mathcal{R} = \mathrm{Vect}\big((r_1^n), (r_2^n)\big)$. Les suites satisfaisant **(R)** sont alors exactement les suites de la forme

$$u_n = A\, r_1^n + B\, r_2^n \ , \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes arbitraires} .$$

- si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique **(C)** admet une unique racine (double) $r_0 = \dfrac{a}{2}$, la matrice A admet donc une seule valeur propre (double) et n'est donc pas diagonalisable (puisque $A \neq r_0 I_2$). On la trigonalise alors, on peut facilement montrer que A est semblable à $T = \begin{pmatrix} r_0 & 1 \\ 0 & r_0 \end{pmatrix}$. Un calcul (analogue à celui de l'exemple 2 du paragraphe 1 ci-dessus) montre que $T^n = \begin{pmatrix} r_0^n & n\, r_0^{n-1} \\ 0 & r_0^n \end{pmatrix}$. Comme dans le cas précédent, les suites (u_n) et (v_n) sont les coefficients de la matrice-colonne $X_n = PT^nP^{-1}X_0$, elles s'expriment dans ce cas comme combinaisons linéaires de la suite géométrique (r_0^n) et de la suite $(n\, r_0^n)$. On vient de prouver l'inclusion $\mathcal{R} \subset \mathrm{Vect}\big((r_0^n), (n\, r_0^n)\big)$. De nouveau par égalité des dimensions, $\mathcal{R} = \mathrm{Vect}\big((r_0^n), (n\, r_0^n)\big)$. Les suites satisfaisant **(R)** sont alors exactement les suites de la forme

$$u_n = A\, n\, r_0^n + B\, r_0^n = (An + B)\, r_0^n \ , \quad \text{avec } A \text{ et } B \text{ constantes arbitraires} .$$

4. Exemples de systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Exemple 1. Commençons par le cas d'un système "diagonal" **(S):** $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3y \end{cases}$. On cherche donc les fonctions vectorielles $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, de classe $\mathcal{C}^1$, de la forme $t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, telles que ces deux équations différentielles (ici indépendantes entre elles) soient vérifiées. Ce système **(S)** peut s'écrire sous la forme matricielle $X' = DX$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, et ses solutions sont les fonctions vectorielles $X = (x, y)$, avec $\begin{cases} x(t) = C_1\, e^{2t} \\ y(t) = C_2\, e^{3t} \end{cases}$, où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles (ou complexes si l'on recherche les solutions complexes).

Exemple 2. Étudions maintenant un système "diagonalisable" **(S'):** $\begin{cases} x' &= y \\ y' &= 3x+2y \end{cases}$. Cette fois-ci, les deux équations ne sont pas indépendantes, mais on peut se ramener à ce cas en diagonalisant la matrice. En effet, **(S')** peut s'écrire sous forme matricielle $X' = AX$, en notant $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle inconnue (de classe $\mathcal{C}^1$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$), et en posant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule $\chi_A = X^2 - 2X - 3 = (X+1)(X-3)$, on a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 3\}$, et A est diagonalisable, plus précisément $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (*les détails des calculs sont laissés au lecteur*). On note alors que

$$\textbf{(S')} \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X) \iff Y' = DY$$

en posant $Y = P^{-1}X$ (*cf.* cours sur la dérivation des fonctions vectorielles). Si l'on pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ pour tout t réel, on a donc fait un changement de fonction (vectorielle) inconnue en posant $X = PY$ ou $Y = P^{-1}X$. Donc

$$\textbf{(S')} \iff Y' = DY \iff \begin{cases} u' &= -u \\ v' &= 3v \end{cases} \iff \begin{cases} u(t) &= C_1\, e^{-t} \\ v(t) &= C_2\, e^{3t} \end{cases} \iff Y(t) = \begin{pmatrix} C_1\, e^{-t} \\ C_2\, e^{3t} \end{pmatrix}$$

et, finalement, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = P\,Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1\, e^{-t} \\ C_2\, e^{3t} \end{pmatrix}$, ce qui donne

$$\begin{cases} x(t) &= C_1\, e^{-t} + C_2\, e^{3t} \\ y(t) &= -C_1\, e^{-t} + 3C_2\, e^{3t} \end{cases},$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes arbitraires.

Exemple 3. Voici maintenant un système "triangulaire" **(S"):** $\begin{cases} x' &= -x+y \\ y' &= \quad -y \end{cases}$, on peut le mettre sous la forme $X' = TX$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice T est triangulaire supérieure (et n'est pas diagonalisable puisqu'elle a une seule valeur propre et que ce n'est pas une matrice scalaire). On résout directement la deuxième équation: $y(t) = C_2\, e^{-t}$, puis on réinjecte dans la première que l'on écrit alors sous la forme $x'(t) + x(t) = C_2\, e^{-t}$, soit $e^{-t}\,\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t)\, e^t\big) = C_2\, e^{-t}$, soit $x(t)\, e^t = C_2 t + C_1$. Finalement, ce système se résout en

$$\begin{cases} x(t) &= (C_2 t + C_1)\, e^{-t} \\ y(t) &= C_2\, e^{-t} \end{cases}, \quad \text{ou encore} \quad X(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} t\, e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Exercice 1. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases}$. Préciser la “trajectoire” passant par le point $A(1,1)$.

Exercice 2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = y+z \\ y' = x+z \\ z' = x+y \end{cases}$. Montrer qu'il existe une unique solution vérifiant $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 1 \end{cases}$, et l'expliciter.

Exercice 3. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. En déduire les solutions du système différentiel $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = -4x-3y \end{cases}$.