CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 3
PSI2 2023-2024

PROBLÈME: Quelques développements eulériens

PARTIE A. Étude de la somme d'une série de fonctions.

1. Un réel x non entier étant fixé, on a $\left|u_n(x)\right| = \dfrac{2\,|x|}{|x^2-n^2|} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\,|x|}{n^2}$ (le dénominateur x^2-n^2 est, à partir d'un certain rang, négatif, et sa valeur absolue vaut alors n^2-x^2). Par comparaison à une série de Riemann, on déduit la convergence absolue, et donc la convergence, de la série de terme général $u_n(x)$.

2. Pour montrer la continuité de la fonction somme, la convergence simple ne suffira pas. Les fonctions u_n sont toutes définies et continues sur l'intervalle $I =]0,1[$. Si $S=[a,b]$ est un segment inclus dans I, i.e. $0<a<b<1$, alors

$$\forall x\in S \quad \forall n\in\mathbb{N}^* \qquad \left|u_n(x)\right| = \frac{2x}{n^2-x^2} \leq \frac{2b}{n^2-b^2} = \left|u_n(b)\right|$$

(on a majoré le numérateur et minoré le dénominateur, qui sont positifs) et on sait d'après **a.** que la série de terme général $\left|u_n(b)\right|$ converge, on en déduit la convergence normale de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ sur S, i.e. sur tout segment inclus dans I. On sait que cela entraîne la continuité sur I de la fonction somme s.

Remarque. On peut aussi noter que la série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge en fait normalement sur tout l'intervalle $]0,1[$. En effet, pour $n\geq 2$ et $x\in]0,1[$, on a $\left|u_n(x)\right| = \dfrac{2x}{n^2-x^2} \leq \dfrac{2}{n^2-1}$, et la série $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{2}{n^2-1}$ converge. La fonction $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} u_n$ est alors continue sur $]0,1[$, et on lui ajoute les fonctions u_0 et u_1, elles aussi continues sur $]0,1[$.

3. Par définition, $s(x)$ est la limite des sommes partielles $s_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$, or

$$\begin{aligned} s_n(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x-k}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+k}\,. \end{aligned}$$

4. Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$, on a, pour tout n entier naturel non nul,

$$\begin{aligned} s_n(x+1) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{(x+1)+k} = \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+(k+1)} = \sum_{k=-n+1}^{n+1} \frac{1}{x+k} \\ &= s_n(x) - \frac{1}{x-n} + \frac{1}{x+n+1}\,. \end{aligned}$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $s(x+1)=s(x)$.

5. Chaque fonction u_k est impaire sur $\mathbb{R}\setminus\mathbf{Z}$, donc $s=\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ l'est aussi. Pour $x\in]0,1[$, on a alors

$$s(1-x) = -s(x-1) = -s(x)$$

grâce à l'imparité et à la 1-périodicité.

6. Pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} s_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + s_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\dfrac{x}{2}+k} + \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\dfrac{x+1}{2}+k} \\ &= 2\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k} + 2\sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{x+2k+1} \\ &= 2\sum_{p=-2n}^{2n+1} \frac{1}{x+p}\ , \end{aligned}$$

en constatant que, si l'on pose $p = 2k$ puis $p = 2k+1$, l'indice p décrit tous les entiers relatifs de $-2n$ à $2n+1$. Finalement,

$$s_n\Big(\frac{x}{2}\Big) + s_n\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = 2\,s_{2n}(x) + \frac{2}{x+2n+1}\ .$$

En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $s\Big(\dfrac{x}{2}\Big) + s\Big(\dfrac{x+1}{2}\Big) = 2\,s(x)$, soit la relation **(P2)**.

PARTIE B. Une première identité eulérienne.

7. En observant un cercle trigonométrique (ou bien, en utilisant les formules d'addition de la trigonométrie), on obtient

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)\ .$$

Bien sûr, $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$ et $\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$. Si $x \in]0,1[$, on a alors

$$g(1-x) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi - \pi x) = \pi\,\frac{\cos(\pi-\pi x)}{\sin(\pi - \pi x)} = -\pi\ \mathrm{cotan}(\pi x) = -g(x)\ ,$$

donc g vérifie **(P1)** sur $]0,1[$, puis

$$\begin{aligned} g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big) &= \pi\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\right) = \pi\left(\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) \\ &= \pi\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = \pi\,\frac{\cos(\pi x)}{\frac{1}{2}\,\sin(\pi x)} = 2\pi\ \mathrm{cotan}(\pi x) = 2\,g(x)\ , \end{aligned}$$

donc g vérifie **(P2)**.

La relation **(P1)** se traduit graphiquement par le fait que la courbe représentative de g est symétrique par rapport au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$, il s'agit donc d'une symétrie centrale.

8. On a $\dfrac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$ d'où la convergence de la série et l'existence de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$. Pour le calcul, observons que

$$\frac{1}{n^2-\frac14}=\frac{1}{\left(n-\frac12\right)\left(n+\frac12\right)}=\frac{1}{n-\frac12}-\frac{1}{n+\frac12}\ .$$

En calculant une somme partielle, on observe alors un télescopage:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2-\frac14}=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n-\frac12}-\frac{1}{n+\frac12}\right)=2-\frac{1}{N+\frac12}\quad\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\quad S=2\ .$$

Comme $s(x)-\dfrac{1}{x}=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$, ces fonctions étant toutes négatives sur $\left]0,\dfrac12\right]$, on a $\left|s(x)-\dfrac1x\right|=\left|\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\right|=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|u_n(x)\right|$ et, comme $\left|u_n(x)\right|=\dfrac{2x}{n^2-x^2}\leq\dfrac{2x}{n^2-\frac14}$, on a alors

$$\forall x\in\left]0,\frac12\right]\qquad 0\leq\left|s(x)-\frac1x\right|\leq 2\,x\,S=4x\ .$$

Le majorant tend vers 0 lorsque $x\to0^+$ donc, par encadrement, $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\left(s(x)-\frac1x\right)=0$.

Remarque. On pouvait aussi observer que $s\left(\dfrac12\right)=2+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\frac14-n^2}=2-S$. Or, de la propriété **(P1)**, il résulte que $s\left(\dfrac12\right)=0$, donc $S=2$.

9. Partant de $\cos(t)=1+o(t)$ et $\sin(t)=t+o(t^2)$ au voisinage de 0, on obtient

$$g(x)=\pi\,\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=\pi\,\frac{1+o(x)}{\pi x+o(x^2)}=\frac{\pi}{\pi x}\,\big(1+o(x)\big)\,\big(1+o(x)\big)^{-1}=\frac1x\,\big(1+o(x)\big)=\frac1x+o(1)\ ,$$

ce qui montre que $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(g(x)-\frac1x\right)=0$.

10. La fonction $h=s-g$ est déjà définie et continue sur $I=]0,1[$ ouvert, comme différence de deux fonctions continues sur cet intervalle.

Ensuite, pour $x\in I$, on a $h(x)=\left(s(x)-\dfrac1x\right)-\left(g(x)-\dfrac1x\right)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+}h(x)=0$ d'après les questions **8.** et **9.** ci-dessus. Enfin, les fonctions s et g vérifient sur I la propriété **(P1)**, il est clair alors que toute combinaison linéaire de s et g la vérifie aussi, et notamment la fonction h. On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to1^-}h(x)=0$.

La fonction h étant continue sur $]0,1[$ et admettant des limites finies en 0 et en 1, elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$. On posera donc $h(0)=0$ et $h(1)=0$.

11. La fonction $|h|$ étant continue sur le segment $[0,1]$, elle y admet un maximum. Comme différence de deux fonctions vérifiant la propriété **(P2)**, il est clair que h la vérifie aussi. De l'inégalité triangulaire, on déduit alors que

$$M = \left|h(x_0)\right| \le \frac{1}{2}\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big) + h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| + \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right|\right) \le \frac{1}{2}(M+M) = M\ .$$

L'égalité entre les termes extrêmes entraîne l'égalité de tous les termes, en particulier $\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| + \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| = 2M$ et, comme chaque terme est majoré par M, on a nécessairement $\left|h\Big(\frac{x_0}{2}\Big)\right| = \left|h\Big(\frac{x_0+1}{2}\Big)\right| = M$. En réitérant ce raisonnement, on a pour tout n entier naturel, $\left|h\Big(\frac{x_0}{2^n}\Big)\right| = M$ et, en passant à la limite lorsque n tend vers l'infini, et en utilisant la continuité de la fonction h en 0, on a $M = \left|h(0)\right|$, soit $M = 0$.

12. La fonction h est donc nulle sur $[0,1]$, ce qui entraîne que $g(x) = s(x)$ pour tout $x \in]0,1[$, c'est-à-dire la relation demandée.

13. On peut en fait poser $g(x) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, et on définit ainsi sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$ une fonction g qui est 1-périodique. Les fonctions g et s sont toutes deux 1-périodiques (question **4.** pour s), et elles coïncident sur $]0,1[$, elles coïncident donc sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

PARTIE C. Conséquences de cette première identité.

14. Un calcul élémentaire montre que la dérivée de $x \mapsto \pi\ \mathrm{cotan}(\pi x)$ est $x \mapsto -\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$, et ceci sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$, c'est-à-dire sur chaque intervalle $]k, k+1[$, avec k entier relatif. On va donc chercher à dériver la relation obtenue en **13.** Par commodité, plaçons-nous sur $]0,1[$ pour commencer.

Chaque fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I =]0,1[$, la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I d'après **1.**, examinons maintenant la série des dérivées.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$, on a

$$u_n'(x) = -\frac{2\,(x^2+n^2)}{(x^2-n^2)^2} = -\left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}\right)\ .$$

Si $S = [a,b]$ est un segment inclus dans I (donc $0 < a < b < 1$), alors, pour $x \in S$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\textbf{(*) :} \qquad \left|u_n'(x)\right| = \frac{2(x^2+n^2)}{(n^2-x^2)^2} \le \frac{2(1+n^2)}{(n^2-b^2)^2}\ ,$$

qui est le terme général d'une série convergente (équivalent à $\dfrac{2}{n^2}$) **indépendante de** x, on en déduit la convergence normale sur S (donc la convergence uniforme sur tout segment inclus dans I) de la série $\sum u_n'$.

Le théorème de dérivation des séries de fonctions s'applique donc: la fonction $s = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I (ce que l'on savait déjà puisqu'elle coïncide avec g qui est $\mathcal{C}^1$), et on a

$g' = s' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n$ sur I, ce qui donne

$$\forall x \in I \qquad -\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = -\frac{1}{x^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2} \right) .$$

En changeant les signes, on a la relation demandée, sur $I =]0,1[$. Enfin, chaque membre est fonction 1-périodique de x, donc la relation est vraie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Remarque. Comme en **Q2.**, on peut observer qu'il y a en fait convergence normale sur l'intervalle $I =]0,1[$ tout entier de la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u'_n$: en effet, pour $n \geq 2$, on a $\|u'_n\|_{\infty,I} = \dfrac{2(n^2+1)}{(n^2-1)^2}$, qui est sommable. On peut donc appliquer le théorème de dérivation à la série $\sum_{n\geq 2} u_n$, puis ajouter les fonctions u_0 et u_1 qui sont évidemment de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

15. De la relation obtenue en **12.**, on déduit que

$$\textbf{(*)}: \qquad \forall x \in]0,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi\,\cos(\pi x)}{2x\,\sin(\pi x)} = \frac{\sin(\pi x) - \pi x\,\cos(\pi x)}{2x^2\,\sin(\pi x)} .$$

On a envie de faire tendre x vers 0, non ?

Posons alors $v_n(x) = \dfrac{1}{n^2 - x^2}$ pour $x \in]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Chaque fonction v_n admet une limite finie en 0, à savoir $\lim\limits_{x\to 0^+} v_n(x) = \dfrac{1}{n^2}$, et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement donc uniformément, pas sur $]0,1[$ tout entier, mais sur $J = \left]0, \dfrac{1}{2}\right]$ ce qui suffira pour intervertir somme et limite en 0: en effet, $\|v_n\|_{\infty,J} = \dfrac{1}{n^2 - \frac{1}{4}}$ (qui est sommable). Donc la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (ce que l'on savait déjà) et on peut intervertir somme et limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{n^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) .$$

Dans le dernier membre de l'égalité **(*)**, utilisons des développements limités pour rechercher la limite en 0. Déjà on a un équivalent du dénominateur: $2x^2\,\sin(\pi x) \underset{x\to 0}{\sim} 2\pi x^3$. Pour le numérateur,

$$\sin(\pi x) - \pi x\,\cos(\pi x) = \pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^3) - \pi x \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^2) \right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi^3 x^3}{3} .$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\pi x) - \pi x\,\cos(\pi x)}{2x^2\,\sin(\pi x)} = \dfrac{\pi^2}{6}$, puis en passant à la limite ($x \to 0^+$) dans la relation **(*)**, on conclut que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Remarque. Plus simplement, on peut évaluer la relation obtenue en **Q14.** pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient en effet

$$\pi^2 = 4 + 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^2}\right) = 8\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\ .$$

Or, $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{1}{4}\,\zeta(2) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$, donc

$$\zeta(2) = \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{4}{3}\times\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

PARTIE D. Formule d'Euler-Wallis.

16. Clairement, $\displaystyle\lim_{x\to 0} u_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Une remarque très formelle: les fonctions u_n introduites dans le préambule ont été déclarées comme définies sur $\mathbb{R}\backslash\mathbf{Z}$, donc non définies a priori en 0, c'est donc bien d'un prolongement qu'il s'agit. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on posera maintenant $u_n(0) = 0$, ainsi les fonctions u_n pourront être considérées comme définies et continues sur $[0, 1[$.

Soit $x \in]0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, x]$, on a

$$\big|u_n(t)\big| = -u_n(t) = \frac{2t}{n^2 - t^2} \le \frac{2x}{n^2 - x^2} = \big|u_n(x)\big|$$

(majoration analogue à la question **2.**). La série $\displaystyle\sum_{n\ge 1}\frac{2x}{n^2 - x^2}$ étant convergente, cela prouve la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge 1} u_n$ sur le segment $[0, x]$.

17. Soit $x \in]0, 1[$. Puisque les fonctions u_n, pour $n \ge 1$, sont continues sur le segment $[0, x]$ et que la série $\displaystyle\sum_{n\ge 1} u_n$ converge normalement sur ce segment, il est licite d'intervertir série et intégrale. De **12.**, on déduit que, pour tout $t \in]0, x]$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t) = \pi\ \mathrm{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t}$ (que l'on peut prolonger par continuité en 0 avec la valeur 0). On obtient ainsi, pour $x \in]0, 1[$,

$$\int_0^x \left(\pi\ \mathrm{cotan}(\pi t) - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x u_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2}\,\mathrm{d}t\ ,$$

soit

$$\Big[\ln\big(\sin(\pi t)\big) - \ln(t)\Big]_0^x = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\ln\big|t^2 - n^2\big|\Big]_0^x\ ,$$

soit encore

$$\ln\Big(\frac{\sin(\pi x)}{x}\Big) - \ln(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\ln(n^2 - x^2) - \ln(n^2)\Big)\ ,$$

soit enfin

$$\ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) .$$

18. En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$, on a $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)$. Par continuité de l'exponentielle, on déduit que, si l'on pose $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$, alors $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \lim_{n \to +\infty} P_n$, ce que l'on peut écrire $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$.

19. Pour $x = \frac{1}{2}$, on trouve donc

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} .$$