DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 3
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

Ce problème avait pour objet de démontrer quelques identités mathématiques connues sous le nom d'identités eulériennes, en utilisant les différents théorèmes du cours sur les séries de fonctions pour justifier les différentes interversions (somme-dérivée, somme-intégrale, somme-limite).

2. J'ai lu sur un certain nombre de copies que la fonction s était continue car c'est une somme de fonctions continues!!! **La fonction s est une somme <u>infinie</u> de fonctions continues, i.e. est la somme d'une série de fonctions continues, il y a donc un théorème à invoquer pour prouver sa continuité, avec quelque part une convergence uniforme ou une convergence normale!!!**

Il serait bien de mentionner que chacune des fonctions u_n est continue sur $]0,1[$.

Noter aussi que les fonctions u_n, pour $n \geq 1$, sont négatives sur $]0,1[$, ce qui a occasionné quelques erreurs dans les majorations puisque, pour montrer la convergence normale, c'est $\left|u_n(x)\right|$, et non $u_n(x)$, qu'il faut majorer uniformément.

4. et 6. Il est préférable de commencer par travailler sur des sommes partielles (sinon, on risque de se retrouver avec des sommes de séries divergentes!!). Les calculs sont parfois un peu approximatifs!

7. J'ai lu des choses très étranges sur l'interprétation graphique de la propriété **(P1)**. La bonne réponse est que la courbe de g admet le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ comme centre de symétrie. Une fonction "impaire par rapport à $x = \frac{1}{2}$", cela ne veut pas dire grand-chose!

9. Des erreurs dans la manipulation des développements limités, notamment dans la gestion des restes. Je rappelle un conseil (que l'on vous a probablement donné en première année): pour développer un quotient $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$, il est recommandé de développer le numérateur $N(x)$ et le dénominateur $D(x)$ "sous forme normale", c'est-à-dire en factorisant par le terme prépondérant. On se retrouve alors, à un facteur près, avec un quotient sous la forme $\dfrac{1+u(x)}{1+v(x)}$, où $u(x)$ et $v(x)$ tendent vers 0 et on utilise le DL de $\dfrac{1}{1+v} = (1+v)^{-1}$ lorsque $v \to 0$. Voici un exemple, un développement de $\text{cotan}(\pi x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$ en zéro:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} &= \frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)}{\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1}{\pi x} \frac{1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)}{1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)} \\
&= \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{2} + o(x^3)\right) \left(1 + \frac{\pi^2 x^2}{6} + o(x^3)\right) \\
&= \frac{1}{\pi x} \left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{3} + o(x^3)\right) = \frac{1}{\pi x} - \frac{\pi}{3}\, x + o(x^2)\ .
\end{aligned}$$

10. Le prolongement par continuité au point 1 est rarement mentionné, il se déduit de celui en 0 par la propriété de symétrie **(P1)**.

11. Beaucoup pensent à itérer pour obtenir $\left|h\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)\right| = M$ pour tout n. **Il faut alors mentionner la continuité de h en 0** pour arriver à $\left|h(0)\right| = M$.

14. La relation de **Q14.** se déduit de celle de **Q12.** en dérivant... à condition de le justifier correctement. Ici, **c'est sur la série des dérivées $\sum u_n'$ qu'il faut vérifier une convergence uniforme**, au moins sur tout segment.

15. Il y a différentes façons d'obtenir la valeur de $\zeta(2)$, la plus simple étant sans doute d'évaluer pour $x = \dfrac{1}{2}$ la relation obtenue en **Q14.** On peut aussi faire tendre x vers zéro dans la relation de **Q12.** (ou bien dans celle de **Q14.** à condition de la réécrire un peu différemment), mais alors il faut justifier une **interversion somme-limite**:

$$\text{Pourquoi a-t-on} \quad \zeta(2) = \lim_{x \to 0} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - x^2} \right) \quad \text{par exemple ???}$$

17. Interversion série-intégrale (ou "intégration terme à terme") parfois expédiée un peu vite.

18. Là aussi, j'aurais aimé plus de détails: commencer par travailler sur des sommes et des produits partiels (donc comportant un nombre fini de termes ou de facteurs), puis passer à la limite en mentionnant clairement la continuité de la fonction exponentielle.