COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 10 : du 04/12 au 08/12

Réduction des endomorphismes

Tout le chapitre.

Séries entières

Tout le chapitre, i.e.

Notion de série entière associée à une suite de coefficients (a_n).

Lemme d'Abel: si la suite $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors, pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ comme la borne supérieure, dans $[0, +\infty]$, de l'ensemble des $r \in \mathbb{R}_+$ tels que la suite $(a_n r^n)$ est bornée.

La série entière converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$, diverge grossièrement pour tout z tel que $|z| > R$. Elle converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D}(O, r)$ avec $r < R$.

Définition du disque (ouvert) de convergence $D(O, R)$, de l'intervalle (ouvert) de convergence $]-R, R[$.

Comparaison: si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, ou bien si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$. Si $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$, alors $R_a = R_b$. Utilisations de la régle de d'Alembert.

Rayon de convergence de la somme, du produit de Cauchy, de deux séries entières. Une série entière et sa “dérivée formelle” ont le même rayon de convergence.

La fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle de convergence $I =]-R, R[$. Ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme, ses primitives sur I s'obtiennent par primitivation terme à terme. Relation $f^{(k)}(0) = k! a_k$.

Fonctions développables en série entière (DSE), série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$. Unicité du développement en série entière. Formule de Taylor avec reste intégral.

Développements en série entière des fonctions usuelles, à savoir exp, ch, sh, cos, sin, Arctan, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement A et B sont diagonalisables.
- Théorème de Cayley-Hamilton. Preuve dans le cas diagonalisable (*voire trigonalisable ?*)
- Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Nature de la série entière $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq R$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur $]-R, R[$, relation $f^{(k)}(0) = k! a_k$, unicité du développement en série entière.
- Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.