DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 4
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

Ce problème, dont les différentes parties étaient assez indépendantes, explorait la notion de sous-espace stable par un endomorphisme, et notamment le lien avec les sous-espaces propres. Je rappelle à ce sujet qu'une droite vectorielle est stable par un endomorphisme si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre, c'est un résultat du cours.

Parmi les défauts souvent rencontrés, je note chez certain(e)s un manque de maîtrise du vocabulaire de l'algèbre linéaire, d'où parfois des phrases dénuées de sens, ou des expressions étonnantes ("une combinaison linéaire de droites" par exemple).

Enfin, certaines questions méritaient, après éventuellement quelques calculs, **de se terminer par une conclusion clairement énoncée**, et c'est loin d'être le cas sur toutes les copies, je crois qu'un effort doit être fait par toutes et tous en ce sens!

1.a. On demande les **éléments** propres de u, il ne faut donc pas seulement mentionner la valeur propre 0, mézôssi préciser quel est le sous-espace propre associé. Ceci n'est pas toujours fait, ou alors maladroitement, comme en écrivant $E_0(u) = \big\{(x,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\big\}$, ce qui n'est pas faux, mais l'écriture $E_0(u) = \mathrm{Vect}(e_1)$ ou $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ est préférable.

1.b. Encore des réponses pas forcément fausses, mais étonamment maladroites, comme

$$\mathrm{Im}(v) = \big\{(-y,x)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\big\} \qquad !!!$$

pour dire que $\mathrm{Im}(v) = \mathbb{R}^2$, i.e. que v est surjectif.

3.c. Une question un peu délicate reposant sur le fait que deux formes linéaires non nulles ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles, ou encore que deux équations linéaires définissent le même hyperplan si et seulement si on a proportionnalité des coefficients. Certains ont parlé d'orthogonalité ou de vecteur normal à un hyperplan: si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, effectivement en munissant $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique, un hyperplan dont une équation cartésienne est $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{\nu} = (a_1, \cdots, a_n)$, c'est donc une bonne idée même si les espaces euclidiens n'ont pas encore été revus cette année.

4.a. Cette question n'a pas toujours été traitée et, lorsqu'elle l'a été, elle se termine rarement par un bilan clair! Comme je l'ai dit en introduction, si vous faites des calculs (recherche des sous-espaces propres de $M^\top$ par exemple), il convient de terminer la question en donnant clairement une énumération de tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f. Idem pour **4.b.**

5. Question assez bien traitée en général.

6.c. Cela repose sur un exercice classique: si un endomorphisme f de E est tel que tout vecteur (non nul) est vecteur propre, alors f est une homothétie. Comme je suis revenu de ma promenade dans les bois et que je n'ai pas trouve de champignons, je vous en livre une démonstration:

Pour tout vecteur x non nul, il existe un scalaire λ_x (clairement unique) tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soient alors x et y deux vecteurs de E non colinéaires, on a $f(x) = \lambda_x\, x$, $f(y) = \lambda_y\, y$ et $f(x+y) = \lambda_{x+y}(x+y)$, mais on a aussi par linéarité $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x\, x + \lambda_y\, y$. De ces deux relations et de la liberté de la famille (x,y), on tire $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$, donc $\lambda_x = \lambda_y$.

Si x et y sont deux vecteurs colinéaires mais non nuls, par exemple $y = \alpha x$, alors $f(x) = \lambda_x\, x$, $f(y) = \lambda_y\, y = \alpha\, \lambda_y\, x$, mais aussi, par linéarité, $f(y) = \alpha f(x) = \alpha\, \lambda_x\, x$. Comme $\alpha \neq 0$ et $x \neq 0_E$, on tire $\lambda_x = \lambda_y$.

Finalement, le scalaire λ_x *est le même pour tous les vecteurs* x *non nuls de* E*, notons-le* λ*, on a alors* $f(x) = \lambda x$ *pour tout vecteur* x *non nul, et cette relation étant trivialement vraie pour* $x = 0_E$*, on a bien* $f = \lambda \,\mathrm{id}_E$*.*

7.b. Des essais de récurrence bien peu convaincants, la propriété précise, dépendant d'un entier n, que vous souhaitez montrer par récurrence n'étant pas clairement formulée!

8. Question pas toujours traitée. La partie un peu délicate est d'expliquer convenablement comment construire une "base adaptée à un drapeau". Pour employer des termes compréhensibles par le commun des mortels, partant de sous-espaces F_0, $\cdots$, F_n comme proposés dans l'énoncé, comment construire une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de E telle que, pour tout k, $(e_1, \cdots, e_k)$ soit une base de F_k.

10.b. Quelques erreurs d'argumentation: la famille $\mathcal{B}_x$ est **par définition** génératrice de V_x, mais on ne connaît pas a priori la dimension de V_x. C'est seulement après avoir montré que la famille $\mathcal{B}_x$ est libre (*mais c'est un résultat du cours!*) que l'on peut affirmer que $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_x) = \dim(V_x) = r$.