COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 11 : du 11/12 au 15/12

Séries entières

Tout le chapitre, *cf.* programme précédent.

Espaces vectoriels normés

Notion de norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Distance associée à une norme. Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Parties bornées. Parties convexes. Toute boule est convexe.

Norme associée à un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité.

Exemple des normes N_1, N_2, N_∞ sur $\mathbb{K}^n$ ou bien sur $\mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{K}\big)$.

Notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé. Unicité de la limite. Opérations algébriques sur les suites convergentes.

Notion de normes équivalentes. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes (*admis*), la convergence d'une suite peut alors s'étudier coordonnée par coordonnée dans une base.

Topologie dans un e.v.n.: points intérieurs, parties ouvertes. Points adhérents, parties fermées, caractérisations séquentielles. Intérieur, adhérence. Parties denses.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Nature de la série entière $\sum a_n z^n$ pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq R$.
- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
- Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une série entière sur $]-R,R[$, relation $f^{(k)}(0) = k!a_k$, unicité du développement en série entière.
- Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- Toute boule d'un e.v.n. est convexe.
- Comparaison des trois normes usuelles N_1, N_2 et N_∞ sur $\mathbb{R}^n$.
- Une boule ouverte est un ouvert, une boule fermée est un fermé.