DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 4

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **09/12/2023**

EXERCICE

Séries génératrices de la suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par les conditions

$$a_0 = 0 \; ; \qquad a_1 = 1 \; ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \; .$$

PARTIE A.

A.1. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $0 \leq a_n \leq 2^n$.

A.2. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!}\, x^n$?

On note f la fonction somme de la série entière considérée ci-dessus.

A.3. Montrer que f est solution, sur $]-R, R[$, de l'équation différentielle $y'' - y' - y = 0$.

A.4. En déduire l'expression de $f(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

PARTIE B :

Le but de cette partie est l'étude de la série entière de terme général $u_n(x) = a_n x^n$. On note $A(x)$ sa somme lorsque celle-ci est convergente : $A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

B.1. Montrer que la suite (a_n) est croissante, et à valeurs strictement positives à partir du rang 1.

B.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Expliciter une fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout n entier naturel non nul, on ait $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.

Quel est le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+^*$?

B.3. En déduire que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.

B.4. Montrer que $u_n \in [1, 2]$ pour tout n entier naturel non nul. En déduire que la suite (u_n) converge, puis déterminer sa limite l.

B.5. Quel est le rayon de convergence R' de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n x^n$?

B.6. Soit $x \in]-R', R'[$. Exprimer à l'aide de $A(x)$ les sommes

$$A_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} \quad ; \quad A_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+2} \quad ; \quad A_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} x^{n+2} \; .$$

En déduire l'expression de $A(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

PROBLÈME
Autour des matrices nilpotentes.

Une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** s'il existe un entier naturel non nul k tel que $M^k = 0_n$, où 0_n est la matrice nulle (carrée d'ordre n). Dans ce cas, on définit son **indice de nilpotence** p par

$$p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid M^k = 0_n\} .$$

On a ainsi $M^{p-1} \neq 0_n$ et $M^p = 0_n$.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle **commutant** de la matrice A l'ensemble des matrices qui commutent avec A:

$$\mathcal{C}(A) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid AM = MA\right\} .$$

On admet que cet ensemble $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit k un entier naturel, avec $k \geq 2$, soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que la matrice M est une **racine k-ième** de la matrice A si on a $M^k = A$.

PARTIE A. Étude d'un exemple.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que 0 est valeur propre de M, que peut-on dire de sa multiplicité ? En déduire que le polynôme caractéristique de M est

$$\chi_M = X^3 - \mathrm{tr}(M)\, X^2 .$$

Dans la suite de cette partie, la lettre A désigne la matrice carrée d'ordre trois que voici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix} .$$

2. De **1.**, déduire, sans aucun calcul, le polynôme caractéristique de la matrice A donnée ci-dessus.

3. Montrer que A est nilpotente et préciser son indice de nilpotence.

4. Montrer que A est semblable à la matrice élémentaire $T = E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et exhiber une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = PTP^{-1}$.

5. Donner la forme générale des matrices carrées d'ordre trois commutant avec la matrice T. En déduire la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(T)$, puis celle de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$.

6. Donner la forme générale des matrices $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant $R^2 = T$. *On pourra utiliser la question précédente.* En déduire qu'il existe une infinité de matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = A$. *On ne demande pas d'expliciter ces dernières.*

7. Soit la matrice $B = I_3 + A$. Montrer (*sans expliciter les matrices*!) que la matrice $M = I_3 + \dfrac{1}{2}A$ est une racine carrée de la matrice B. Plus généralement, soit k un entier naturel avec $k \geq 2$, construire une matrice R qui est une racine k-ième de la matrice B, on l'écrira sous la forme d'une combinaison linéaire de I_3 et de A. *On ne demande pas de trouver* **toutes** *les racines k-ièmes de A.*

PARTIE B. Propriétés générales des matrices nilpotentes.

Dans cette partie, la lettre A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note χ_A son polynôme caractéristique.

8. Montrer que, si A est nilpotente, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

9. Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

10. Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\chi_A = X^n$.

11. Montrer la réciproque de la question **8.**

12. En déduire que, si les matrices A et $2A$ sont semblables, alors A est nilpotente.

13. On suppose A nilpotente d'indice p.

a. Montrer que $p \leq n$.

b. Montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est annulateur de A.

c. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de A, on note m la multiplicité de la racine 0 dans P, on a ainsi $P = X^m Q$ où $Q \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme tel que $Q(0) \neq 0$.

Montrer que la matrice $Q(A)$ est inversible, puis que $m \geq p$.

d. Quels sont exactement les polynômes annulateurs de la matrice A ?

PARTIE C. Une propriété classique.

Dans cette partie, on considère deux matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telles que

(1): la matrice N est nilpotente d'indice p, avec $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$;

(2): les matrices A et N commutent, i.e. $AN = NA$.

On pose ensuite $M = A + N$.

14. Dans cette question, on suppose A inversible.

a. Montrer que la matrice $A^{-1}N$ est nilpotente.

b. De la question **10.**, déduire que $\det(A^{-1}N + I_n) = 1$.

c. Prouver que $\det(M) = \det(A)$.

15. Dans cette question, on suppose A non inversible.

a. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $(A+N)^p = AB$.

b. En déduire que $\det(M) = \det(A)$.

16. Des questions **14.** et **15.**, déduire l'égalité des polynômes caractéristiques $\chi_M = \chi_A$.

PARTIE D. Calculs sur des matrices unipotentes.

Dans cette partie, la matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est supposée nilpotente d'indice p. On pose

$$A = I_n + N\ .$$

17. Déterminer le spectre de A. En déduire que A est inversible.

18. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque, soit q un entier naturel. Simplifier l'expression

$$(I_n + M)\left(\sum_{k=0}^{q} (-1)^k M^k\right)\ .$$

19. En déduire l'expression de A^{-1} sous la forme d'un polynôme de la matrice N.

20. Le cours indique que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet un développement en série entière de la forme

$$\textbf{(*)} \qquad \forall x \in]-R, R[\qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \ .$$

Rappeler le rayon de convergence R, et donner une expression des coefficients a_k, pour $k \in \mathbb{N}$, utilisant des factorielles.

21. Pour tout k entier naturel, on pose $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i}$. Sans calcul, préciser la valeur du coefficient c_k en fonction de l'entier k.

22. En déduire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que la matrice $R = P(N)$ soit une racine carrée de la matrice A. Expliciter un tel polynôme P.

23. La relation **(*)** de la question **20.** reste-t-elle vraie pour $x = R$ et pour $x = -R$? *On pourra utiliser la formule de Stirling.*

24. *Question réservée aux plus audacieux!*

La matrice A admet-elle une racine k-ième pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$?