CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 4
PSI2 2023-2024

EXERCICE : Séries génératrices de la suite de Fibonacci

PARTIE A.

A.1. On montre l'inégalité par récurrence double (récurrence avec deux prédécesseurs) : elle est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$, et si, pour un entier naturel n donné, elle est vraie aux rangs n et $n+1$, autrement dit si $0 \le a_n \le 2^n$ et $0 \le a_{n+1} \le 2^{n+1}$, alors elle reste vraie au rang $n+2$ puisque, par addition d'inégalités,

$$0 \le a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \le 2^{n+1} + 2^n = 3 \times 2^n \le 4 \times 2^n = 2^{n+2} .$$

A.2. Soit x réel, d'après ce qui précède, on a $\left|\dfrac{a_n}{n!}x^n\right| \le \dfrac{(2\,|x|)^n}{n!}$. Or la série à termes positifs $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{(2\,|x|)^n}{n!}$ converge (c'est une série exponentielle). Par comparaison de séries à termes positifs, on a montré que la série entière $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{a_n}{n!}x^n$ converge (absolument) pour tout réel x, son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

A.3. Par théorème, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[= \mathbb{R}$, et ses dérivées successives se calculent par dérivation terme à terme. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,a_n\,x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{(n-1)!}\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\,x^n .$$

De même, $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+2}}{n!}\,x^n$. De la relation $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$, valable pour tout entier naturel n, on déduit la relation

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) - f'(x) - f(x) = 0 .$$

A.4. L'équation différentielle **(E)** : $y'' - y' - y = 0$ est linéaire, du second ordre, à coefficients constants, on la résout en introduisant son équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$, qui a deux racines distinctes $r_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Les solutions de **(E)** sont donc les fonctions de la forme $y = A\,e^{r_1 x} + B\,e^{r_2 x}$. Les conditions initiales $f(0) = a_0 = 0$ et $f'(0) = a_1 = 1$ permettent de déterminer les constantes A et B. On obtient (*détails laissés au lecteur*) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}\right) .$$

PARTIE B.

B.1. On a $a_1 = 1 \ge a_0 = 0$ et, pour $n \ge 1$, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \ge a_n$ puisque $a_{n-1} \ge 0$ d'après la question **A.1.** La suite (a_n) est donc croissante. Comme $a_1 > 0$, elle est bien à valeurs strictement positives à partir du rang 1.

B.2. On a $u_{n+1} = \dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout n entier naturel non nul.

La fonction recherchée est donc $\varphi : x \mapsto 1 + \dfrac{1}{x}$. La fonction φ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

B.3. Posons $v_n = u_{2n}$, on a alors $v_{n+1} = u_{2n+2} = \psi(u_{2n}) = \psi(v_n)$, avec $\psi = \varphi \circ \varphi$. La fonction ψ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (intervalle stable par ailleurs) car composée de deux fonctions décroissantes. Donc $v_{n+2} - v_{n+1} = \psi(v_{n+1}) - \psi(v_n)$ est du même signe que $v_{n+1} - v_n$, ce qui signifie que la différence $v_{n+1} - v_n$ est de signe constant, autrement dit la suite (v_n) est monotone. On raisonne de même pour la suite $(w_n) = (u_{2n+1})$. *On pourrait montrer que (v_n) et (w_n) sont de sens de variation contraires.*

B.4. On a $u_1 = 1$, l'intervalle $[1,2]$ est stable par φ puisque $\varphi\big([1,2]\big) = \big[\varphi(2), \varphi(1)\big] = \left[\dfrac{3}{2}, 2\right] \subset [1,2]$. On a donc $u_n \in [1,2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) sont alors toutes deux convergentes puisque monotones et bornées (à valeurs dans $[1,2]$). Chacune de ces deux suites a pour limite un point fixe de l'application ψ puisque ψ est continue sur $[1,2]$. Or, $\psi(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$ et la seule solution de l'équation $\psi(x) = x$ dans l'intervalle $[1,2]$ est le nombre d'or $l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

B.5. Les coefficients a_n étant strictement positifs, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. La règle de d'Alembert montre alors que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ est $R' = \dfrac{1}{l} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

B.6. On obtient successivement

$$A_0(x) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x^2\, A(x)\ ;$$

$$A_1(x) = x \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = x\,\big(A(x) - a_0\big) = x\, A(x)\ ;$$

$$A_2(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = A(x) - (a_0 + a_1 x) = A(x) - x\ .$$

Pour tout n entier naturel, on a $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. On multiplie par x^{n+2} et on somme pour n de 0 à $+\infty$ (si $x \in]-R', R'[$, toutes les séries sont convergentes), on obtient la relation

$$\forall x \in]-R', R'[\qquad A_2(x) = A_1(x) + A_0(x)\ ,$$

soit $A(x) - x = x\,A(x) + x^2\,A(x)$, d'où l'on déduit tranquillement que $A(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ pour $x \in]-R', R'[= \left]\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\ ,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$.

PROBLÈME

Autour des matrices nilpotentes.

PARTIE A. Étude d'un exemple.

1. Par le théorème du rang, on a $\dim(\operatorname{Ker} M) = \dim\big(E_0(M)\big) = 3 - 1 = 2$. Donc $0 \in \operatorname{Sp}(M)$, et sa multiplicité est au moins égale à 2 (dimension du sous-espace propre associé), elle vaut donc 2 ou 3. Le polynôme caractéristique de M est donc multiple de X^2, et comme il est unitaire et de degré 3, il est de la forme $\chi_M = X^3 + \alpha X^2$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$. Enfin, on sait que le coefficient de X^2 est $-\operatorname{tr}(M)$, donc $\chi_M = X^3 - \operatorname{tr}(M)\, X^2$.

2. La matrice A est non nulle, et toutes ses colonnes (ou lignes) sont proportionnelles, elle est donc de rang 1. Enfin, sa trace est nulle, donc $\chi_A = X^3$ d'après **Q1.** ci-dessus.

3. Le théorème de Cayley-Hamilton indique que $\chi_A(A) = A^3 = 0_3$, donc la matrice A est nilpotente, mais cela ne donne pas son indice de nilpotence. On vérifie alors par le calcul que $A^2 = 0_3$ alors que $A^1 = A \neq 0_3$, donc A est nilpotente d'indice 2.

4. Notons u_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à la matrice A, on a donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u_A) = A$, où $\mathcal{B}_0$ est la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Pour répondre à cette question, il faut construire une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = T$, ce qui revient à écrire les conditions $\begin{cases} u_A(e_1) = e_2 & (\mathbf{1}) \\ u_A(e_2) = 0 & (\mathbf{2}) \\ u_A(e_3) = 0 & (\mathbf{3}) \end{cases}$. La relation **(1)** signifie que e_2 appartient à $\operatorname{Im}(u_A)$ et que e_1 est un de ses antécédents, ce qui incite à prendre $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (une colonne de la matrice A) et $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Enfin, d'après **(3)**, le vecteur e_3 doit appartenir au noyau de u_A qui est le plan d'équation cartésienne $x + 3y - 7z = 0$, sans être colinéaire à e_2, on voit que $e_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient. Enfin, l'équation **(2)** est nécessairement vérifiée puisque la relation $A^2 = 0_3$ montre que $\operatorname{Im}(u_A) \subset \operatorname{Ker}(u_A)$. Posons donc $P = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que $\det(P) = 2 \neq 0$, ce qui montre que la famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ construite est bien une base de $\mathbb{C}^3$, et on a $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u_A) = T$. Donc A est semblable à T et on a $A = PTP^{-1}$.

Il y a bien sûr plein d'autres choix possibles pour la matrice de passage P.

5. Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on calcule $TM - MT = \begin{pmatrix} -b & 0 & 0 \\ a - e & b & c \\ -h & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc M commute avec T si et seulement si $\begin{cases} a = e \\ b = 0 \\ c = 0 \\ h = 0 \end{cases}$, donc $\mathcal{C}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix} \ ; \ (a, d, f, g, i) \in \mathbb{C}^5 \right\}$. On voit ainsi que $\dim\big(\mathcal{C}(T)\big) = 5$ puisqu'une matrice de $\mathcal{C}(T)$ est déterminée par la donnée de 5 scalaires a, d, f, g, i. *On peut aussi dire que $\mathcal{C}(T)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$*

qui sont combinaisons linéaires de $E_{1,1}+E_{2,2}$, $E_{2,1}$, $E_{2,3}$, $E_{3,1}$ et $E_{3,3}$ et, ces cinq matrices étant linéairement indépendantes (c'est immédiat), cet espace est de dimension 5.

Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a alors les équivalences

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}(A) \quad &\iff \quad NA = AN \iff NPTP^{-1} = PTP^{-1}N \\ &\iff \quad P^{-1}NPT = TP^{-1}NP \iff MT = TM \iff M \in \mathcal{C}(T)\ , \end{aligned}$$

en posant $M = P^{-1}NP$, soit $N = PMP^{-1}$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}(A)$ est donc l'image par Φ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(T)$, en introduisant l'application $\Phi : \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}\right.$.

Φ étant un isomorphisme, il conserve les dimensions, donc $\dim\big(\mathcal{C}(A)\big) = \dim\big(\mathcal{C}(T)\big) = 5$.

6. Si $R^2 = T$, alors $RT = R^3 = TR$, donc $R \in \mathcal{C}(T)$. On cherche donc R sous la forme $R = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}$. On a alors $R^2 = T \iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 &=& 0 \\ i^2 &=& 0 \\ (a+i)f &=& 0 \\ (a+i)g &=& 0 \\ 2ad+fg &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0 \\ i = 0 \\ fg = 1 \end{array}\right.$. Les racines carrées de la matrice A sont donc exactement les matrices de la forme $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & f \\ \dfrac{1}{f} & 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $d \in \mathbb{C}$ et $f \in \mathbb{C}^*$. Il y en a donc une infinité.

Soit maintenant $S \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on a alors les équivalences

$$S^2 = A \iff S^2 = PTP^{-1} \iff P^{-1}S^2P = T \iff (P^{-1}SP)^2 = T \iff R^2 = T\ ,$$

en posant $R = P^{-1}SP$, soit $S = PRP^{-1} = \Phi(R)$, l'application Φ ayant été introduite dans le corrigé de la question précédente. Les racines carrées de la matrice A sont donc les images par Φ des racines carrées de la matrice T. Comme Φ est bijective, il y en a aussi une infinité.

7. Comme $A^2 = 0_3$, on a $M^2 = \left(I_3 + \dfrac{1}{2}A\right)^2 = I_3 + \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{2}A + \dfrac{1}{4}A^2 = I_3 + A = B$, donc M est une racine carrée de B.

Posons $R = I_3 + \dfrac{1}{k}A$, alors par le binôme de Newton, en tenant compte de $A^2 = 0_3$,

$$R^k = \left(I_3 + \frac{1}{k}A\right)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{k}A\right)^j = \binom{k}{0}\left(\frac{1}{k}A\right)^0 + \binom{k}{1}\left(\frac{1}{k}A\right)^1 = I_3 + A = B\ ,$$

donc R est une racine k-ième de B.

PARTIE B. Propriétés générales des matrices nilpotentes.

8. Si A est nilpotente, elle admet pour polynôme annulateur X^p où p est son indice de nilpotence. On sait que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathcal{Z}(X^p) = \{0\}$ (*toute valeur propre est racine du polynôme annulateur*). Par ailleurs, la matrice A n'est pas inversible (sinon, A^p serait inversible, mais $A^p = 0_n$), donc elle admet 0 pour valeur propre. Finalement, $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

9. Si A est nilpotente et diagonalisable, alors comme elle admet pour seule valeur propre 0, elle est semblable à la matrice nulle, et finalement $A = 0_n$. La matrice nulle est donc la seule matrice à la fois nilpotente et diagonalisable.

10. Si A est nilpotente, son polynôme caractéristique est unitaire de degré n, scindé car $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (théorème de d'Alembert-Gauss), et sa seule racine est 0 (question **8.**), donc $\chi_A = X^n$ (c'est le seul polynôme satisfaisant ces conditions).

Réciproquement, si $\chi_A = X^n$, le théorème de Cayley-Hamilton donne $A^n = \chi_A(A) = 0_n$, la matrice A est donc nilpotente.

11. Si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$, alors $\chi_A = X^n$ (même raisonnement qu'en **Q10.**), donc $A^n = 0_n$ par Cayley-Hamilton.

12. Supposons A et $2A$ semblables, montrons que $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Par l'absurde, supposons que A admette une valeur propre non nulle λ, alors λ est aussi valeur propre de $2A$ qui est semblable à A, donc il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, non nul, tel que $2AX = \lambda X$, soit $AX = \dfrac{\lambda}{2} X$. Donc $\dfrac{\lambda}{2}$ est valeur propre de A. En itérant ce raisonnement, on voit que, pour tout k entier naturel, $\dfrac{\lambda}{2^k}$ est aussi valeur propre de A. Si λ est non nul, cela entraîne que A admet une infinité de valeurs propres, ce qui est impossible.

On a donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$, puis $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ puisque le spectre est non vide ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Donc A est nilpotente d'après **Q11.**

13.a. On a vu que, si A est nilpotente, alors $\chi_A = X^n$ puis $A^n = 0_n$, donc l'indice de nilpotence de A est majoré par n.

b. Si A est nilpotente d'indice p, alors X^p est un polynôme annulateur. Or, tout multiple d'un polynôme annulateur est encore un polynôme annulateur.

c. Décomposons le polynôme Q en produit de facteurs irréductibles (i.e. du premier degré) dans $\mathbb{C}[X]$: si Q est de degré d et de coefficient dominant $a \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire

$$Q = a \prod_{k=1}^{d} (X - \alpha_k) \ ,$$

où les α_k sont les racines (non nécessairement distinctes) de Q. Comme $Q(0) \neq 0$, les α_k sont non nuls. On a alors $Q(A) = a \displaystyle\prod_{k=1}^{d} (A - \alpha_k\, I_n)$ et, comme les α_k ne sont pas valeurs propres de A, chacune des matrices $A - \alpha_k\, I_n$ est inversible, et le scalaire a est non nul. La matrice $Q(A)$ est un produit de matrices inversibles, elle est donc inversible.

Autre preuve: Supposons qu'il existe un vecteur $Y \in \mathbb{C}^n$, non nul, tel que $Q(A) \cdot Y = 0$. Posons $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ avec $q_0 = Q(0) \neq 0$, on a donc **(*):** $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} q_k A^k Y = 0$. Comme A est nilpotente, on peut introduire l'entier $r = \min\big\{ j \in \mathbb{N}^* \mid A^j Y = 0 \big\}$, on a alors $A^{r-1} Y \neq 0$ et $A^r Y = 0$. En multipliant à gauche par A^{r-1} la relation **(*)**, on obtient $q_0\, A^{r-1} Y = 0$, ce qui est contradictoire puisque, ni le scalaire q_0, ni le vecteur $A^{r-1} Y$ n'est nul. Donc $\mathrm{Ker}\,\big(Q(A)\big) = \{0\}$, la matrice $Q(A)$ est inversible.

Donc $0_n = P(A) = A^m\, Q(A)$ et, comme la matrice $Q(A)$ est inversible, on déduit que $A^m = 0_n$, donc $m \geq p$ par minimalité de l'indice de nilpotence. Cela signifie que le polynôme P est multiple de X^p.

d. Les polynômes annulateurs de A sont donc exactement les polynômes multiples de X^p.

PARTIE C. Une propriété classique.

14.a. Comme A et N commutent, A^{-1} et N commutent aussi:

$$AN = NA \Longrightarrow A^{-1}(AN)A^{-1} = A^{-1}(NA)A^{-1} \Longrightarrow NA^{-1} = A^{-1}N\ .$$

On montre alors par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $(A^{-1}N)^k = (A^{-1})^k\, N^k$; en prenant p tel que $N^p = 0$, on a $(A^{-1}N)^p = 0$, donc $A^{-1}N$ est nilpotente.

b. Donc $\chi_{A^{-1}N} = X^n$ d'après **Q10.** et, en particulier, pour $X = -1$,

$$(-1)^n = \chi_{A^{-1}N}(-1) = \det(-I_n - A^{-1}N) = (-1)^n\ \det(I_n + A^{-1}N)\ ,$$

donc $\det(A^{-1}N + I_n) = 1$.

c. Enfin, $\det(M) = \det(A+N) = \det\big(A(A^{-1}N + I_n)\big) = \det(A)\cdot\det(A^{-1}N + I_n) = \det(A)$.

15.a. Comme A et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}(A+N)^p &= \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\ A^{p-k}\,N^k = \sum_{k=0}^{p-1}\binom{p}{k}\ A^{p-k}\,N^k\\ &= \sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\ A^j\,N^{p-j} = AB\ ,\end{aligned}$$

en posant $B = \displaystyle\sum_{j=1}^{p}\binom{p}{j}\ A^{j-1}\,N^{p-j}$. *Pour passer de la première ligne à la deuxième, on a fait le changement d'indice $j = p-k$ et on a utilisé la symétrie $\binom{p}{k} = \binom{p}{p-k}$.*

b. Donc $\big(\det(A+N)\big)^p = \det\big((A+N)^p\big) = \det(AB) = (\det A)\ (\det B) = 0$ puisque $\det(A) = 0$, et finalement $\det(M) = \det(A+N) = 0 = \det(A)$.

Bilan des questions 14. et 15. Si N est nilpotente et si A commute avec N, alors $\det(A+N) = \det(A)$.

16. Si A commute avec N, alors pour tout $x \in \mathbb{C}$ scalaire, $xI_n - A$ commute avec $-N$ (facile), on peut donc appliquer ce qui précède en remplaçant A par $xI_n - A$ et N par $-N$ (qui est aussi nilpotente). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $\det(xI_n - A - N) = \det(xI_n - A)$, soit $\chi_M(x) = \chi_A(x)$, on a ainsi prouvé l'égalité des polynômes $\chi_M = \chi_A$.

PARTIE D. Calculs sur des matrices unipotentes.

17. De $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$, on déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$, par exemple car $\chi_A(x) = \chi_N(x-1) = (x-1)^n$. Donc le nombre 0 n'est pas valeur propre de A, et A est inversible.

18. On observe un télescopage: en distribuant et avec une translation d'indice

$$(I_n + M)\Big(\sum_{k=0}^{q}(-1)^k M^k\Big) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k M^k + \sum_{k=1}^{q+1}(-1)^{k-1}M^k = I_n + (-1)^q M^{q+1} \ .$$

19. En choisissant $q = p-1$, puisque $N^p = 0_n$, on a

$$(I_n + N)\Big(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k N^k\Big) = I_n + (-1)^{p-1}N^p = I_n \ ,$$

ce qui montre que

$$A^{-1} = (I_n + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k N^k = I_n - N + N^2 - N^3 + \cdots + (-1)^{p-1}N^{p-1} \ .$$

20. On a $R = 1$ et, pour tout k entier naturel,

$$a_k = \frac{1}{k!}\,\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}-1\Big)\cdots\Big(\frac{1}{2}-k+1\Big) = \frac{1}{k!}\,\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{3}{2}\Big)\cdots\Big(-\frac{2k-3}{2}\Big) \ ,$$

soit encore $a_0 = 1$ et, pour k entier naturel non nul,

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\cdot\frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-3)}{2^k} = \frac{(-1)^{k-1}\,(2k-2)!}{2^{2k-1}\,k!\,(k-1)!} \ .$$

21. On reconnaît les coefficients d'un produit de Cauchy de deux séries entières (en fait, du "carré de Cauchy" de celle introduite en **Q20.**). Le cours indique que la série entière $\sum_{k\geq 0} c_k x^k$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 et que, pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\Big)^2 = \big(\sqrt{1+x}\big)^2 = 1 + x \ .$$

L'unicité du développement en série entière permet alors d'affirmer que $c_0 = c_1 = 1$ et que $c_k = 0$ pour $k \geq 2$.

22. Soit le polynôme $P = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$, posons $R = P(N)$, alors $R^2 = A$.

En effet, $R^2 = \big(P(N)\big)^2 = P^2(N)$. Or, en réordonnant,

$$P^2 = \Big(\sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{p-1} a_j X^j\Big) = \sum_{0\leq i,j\leq p-1} a_i a_j X^{i+j} = \sum_{k=0}^{2(p-1)} d_k X^k$$

où, pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, le coefficient de X^k vaut $d_k = \sum_{i+j=k} a_i a_j = c_k$.

Comme $N^k = 0$ pour $k \geq p$, il reste donc

$$R^2 = P^2(N) = \sum_{k=0}^{2(p-1)} d_k X^k = \sum_{k=0}^{p-1} d_k X^k = \sum_{k=0}^{p-1} c_k X^k = I_n + N = A \ .$$

23. On peut mettre a_k sous la forme $a_k = (-1)^{k-1} \dfrac{(2k)!}{(2k-1)\,4^k\,(k!)^2}$, ce qui a l'avantage d'être un peu plus simple (et d'être valable aussi pour $k = 0$). La formule de Stirling donne alors

$$|a_k| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi k}\left(\frac{2k}{e}\right)^{2k}}{2k \times 4^k \times 2\pi k\left(\frac{k}{e}\right)^{2k}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}\ .$$

En posant $u_k(x) = a_k x^k$ et $S = [-1, 1]$, on observe que $\|u_k\|_{\infty,S} = |a_k|$ est sommable puisqu'on en a un équivalent qui est le terme général d'une série de Riemann d'exposant $\dfrac{3}{2}$. La fonction série entière $\sum a_k x^k$ converge donc normalement sur le segment S, sa fonction somme $s : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est donc continue sur $[-1, 1]$. Comme la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ est aussi continue sur ce segment et que ces deux fonctions coïncident sur $]-1, 1[$ ouvert d'après **Q20.**, on a donc $f = s$ sur $[-1, 1]$ en passant à la limite dans **(*)**. La relation **(*)** reste donc vraie pour $x = \pm 1$, ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \sqrt{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k = 0$.

24. La fonction $g : x \mapsto \sqrt[k]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{k}}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$, notons

$$\forall x \in\,]-1, 1[\qquad (1+x)^{\frac{1}{k}} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\ .$$

Comme $\big(g(x)\big)^k = 1 + x$ pour $x \in\,]-1, 1[$, un produit de Cauchy de k exemplaires de la série entière $\sum b_n x^n$ donne $1 + x$, soit

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n_1+\cdots+n_k=n} b_{n_1} b_{n_2} \cdots b_{n_k} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\ .$$

On somme sur tous les k-uplets $(n_1, \cdots, n_k)$ d'entiers naturels dont la somme vaut n.

Introduisons alors le polynôme $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} b_n X^n$. On a alors

$$P^k = \sum_{n=0}^{p-1} \Bigg(\sum_{n_1+\cdots+n_k=n} b_{n_1} \cdots b_{n_k} \Bigg) X^n + X^p\, Q = 1 + X + X^p Q\ ,$$

où $Q \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme. En substituant la matrice N à l'indéterminée X dans cette identité polynomiale, on obtient

$$\big(P(N)\big)^k = (P^k)(N) = I_n + N + N^p\, Q(N) = A\ ,$$

on a donc construit une racine k-ième de la matrice A, à savoir la matrice $R = P(N)$.