Soit n un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des **permutations** des entiers de 1 à n, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de l'intervalle entier $[\![1, n]\!]$ vers lui-même.

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée un **dérangement** si elle n'a aucun point fixe, i.e.

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \sigma(k) \neq k\ .$$

On notera enfin d_n le nombre de dérangements des entiers de 1 à n.

On conviendra que $d_0 = 1$.

Pour tout réel x tel que la série converge, on pose $s(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

PARTIE A.

A.1. Quel est le cardinal de $\mathcal{S}_n$?

A.2. Calculer d_1, d_2 et d_3.

A.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $k \in [\![0, n]\!]$, soit A une partie de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ de cardinal k. Parmi les permutations σ appartenant à $\mathcal{S}_n$, combien y en a-t-il dont l'ensemble des points fixes est exactement la partie A ? *On exprimera la réponse à l'aide des nombres d_i.*

A.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$, quel est le nombre de permutations de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ ayant exactement k points fixes ?

A.5. En déduire, pour tout n entier naturel, la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k = n!$

A.6. Montrer que la série entière $s(x)$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

A.7. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $h(x) = s(x)\, e^x$. Montrer que la fonction h est développable en série entière sur $]-1, 1[$, et expliciter ce développement.

A.8. En déduire l'expression de $s(x)$ sur $]-1, 1[$, puis la valeur exacte de R.

PARTIE B.

On introduit la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$.

B.1. En partant de la relation $(1-x)\, f(x) = e^{-x}$, valable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, obtenir une relation simple entre $f^{(n)}(x)$ et $f^{(n-1)}(x)$, valable pour $x \in D_f$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

B.2. En déduire une relation liant d_n et d_{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$.

B.3. Montrer que $\dfrac{d_n}{n!} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

B.4. En déduire un équivalent de d_n lorsque $n \to +\infty$.

B.5. La série entière $s(x)$ converge-t-elle pour $x = 1$? pour $x = -1$?

PARTIE C.

On considère l'expérience aléatoire suivante: un groupe de n individus est invité à une soirée, et chaque participant laisse son chapeau au vestiaire en entrant. La personne responsable du vestiaire, un peu distraite, n'a pas distribué de tickets et, lorsqu'un des participants repart, elle lui donne un chapeau au hasard. On note X la variable aléatoire représentant le nombre d'invités qui repartiront avec leur propre chapeau.

C.1. Montrer que la loi de X est donnée par:

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}\ .$$

C.2. On considère que les participants sont numérotés de 1 à n. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note A_i l'événement: "le i-ième participant a récupéré son chapeau", et on note X_i la variable aléatoire indicatrice de cet événement. Exprimer la variable aléatoire X à l'aide des X_i, $1 \leq i \leq n$. En déduire l'espérance de la variable X.

C.3. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$, quelle est la loi de la variable aléatoire $X_i X_j$?

C.4. Montrer que la variance de X est $\mathrm{V}(X) = 1$.

PARTIE D.

Pour tout n entier naturel, on notera $\delta_n = e^{-1} n! - d_n$.

D.1. Montrer que, pour tout n entier naturel ($n \geq 2$), le nombre d_n est l'entier naturel le plus proche du réel $e^{-1} n!$

D.2. En déduire que le nombre e est irrationnel.

D.3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à une fonction bien choisie, prouver la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \delta_n = (-1)^{n+1}\, e^{-1} \int_0^1 u^n\, e^u\, \mathrm{d}u\ .$$

D.4. Montrer que la suite $\big(|\delta_n|\big)$ est décroissante. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \delta_n$.

D.5. À l'aide d'une intégration par parties, donner un équivalent de $|\delta_n|$ lorsque n tend vers l'infini.

PARTIE E.

Cette partie est indépendante de ce qui précède.

Une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ est appelée une **involution** si elle vérifie $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$.

Pour tout n entier naturel non nul, on note I_n le nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$. On convient que $I_0 = 1$.

E.1. Montrer, pour tout $n \geq 2$, la relation

$$I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}\ .$$

E.2. Montrer que la série entière $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1.

Pour $x \in\,]-1,1[$, on pose $u(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

E.3. Prouver, pour $x \in]-1,1[$, la relation

$$u'(x) = (1+x)\, u(x)\ .$$

E.4. En déduire une expression de $u(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

E.5. Prouver la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = n! \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k\, k!\, (n-2k)!} \quad \text{en posant} \quad N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\ .$$