Équations linéaires scalaires d'ordre un.

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$, l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) \quad : \quad x\,y' - 2y = 0\ .$$

Quelles sont les solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$? Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}$?

2. Résoudre, sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, l'équation différentielle $y' - (\tan x)\,y + \cos^2 x = 0$.

3. Montrer que l'équation différentielle **(E)** : $xy' + y = \tan(x)$ admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

4. Soit l'endomorphisme Φ de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$. Déterminer les éléments propres de Φ.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f'(x) + f(x)\big) = 0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *En posant $u = f + f'$, on écrira que f vérifie l'équation différentielle $y' + y = u$, dont on exprimera les solutions sous forme intégrale.*

6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue et 2π-périodique. Montrer que l'équation **(E)**: $y' - y = f(x)$ admet une unique solution 2π-périodique y_0, puis montrer que y_0 est la seule solution de **(E)** bornée sur $\mathbb{R}$.

Équations linéaires scalaires d'ordre deux.

7. Résoudre l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = x\,e^{2x}$.

8. En recherchant les solutions développables en série entière, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+x^2)\,y'' + 4x\,y' + 2y = 0\ .$$

9. Résoudre l'équation différentielle $x^2\,y'' + x\,y' - y = 2x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en utilisant le changement de variable $x = e^t$.

10. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)\,y'' - 2y = 0$. *On commencera par chercher des solutions polynomiales.*

11. En posant $z = e^{x^2}y$, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + 4x\,y' + (3+4x^2)\,y = 0\ .$$

12. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle $x^3y'' + xy' - y = 0$. *On commencera par chercher une solution polynomiale non nulle.*

13. Soit l'équation différentielle $(\mathbf{E})$: $4x\,y'' + 2y' - y = 0$.

a. Chercher les solutions de **(E)** développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire l'ensemble des solutions de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$.

Systèmes différentiels linéaires

14. Résoudre le système différentiel linéaire d'écriture matricielle $X' = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra, soit utiliser la méthode générale, soit poser le changement de fonction inconnue $X(t) = e^t\, Y(t)$.

15. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x - y - z \\ y' = -x + 2y - z \\ z' = -x - y + 2z \end{cases}$.

Problèmes se ramenant à une équation différentielle

16. Trouver toutes les applications continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)\, f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, \mathrm{d}t\ .$$

17. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = x\, f(-x)\ .$$

18. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, dérivables, telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f'(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$. *On montrera que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre, puis on posera le changement de variable $x = e^t$.*

19. Soit λ un réel, soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer les fonctions $u : [0, 1] \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in [0, 1] \qquad u(x) = \lambda \int_0^x u(t)\, \mathrm{d}t + f(x)\ .$$

20. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) - 2 \int_0^x f(t)\, \cos(x - t)\, \mathrm{d}t = 1\ .$$

Exercices avec Python

21. Soit l'équation différentielle **(E)**: $(1 - x)^3\, y'' - y = 0$.

On note f l'unique solution de **(E)** sur $]-\infty, 1[$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

a. Justifier l'existence et l'unicité de f.

b. Tracer une approximation du graphe de f sur $[0\ ;\ 0{,}09]$ en utilisant la méthode d'Euler.

c. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Pour tout n entier naturel, on pose $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

d. Pour $n \geq 1$, trouver une relation de récurrence liant les coefficients a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}.

e. Avec Python, calculer a_n pour $n \in [\![0, 20]\!]$.

f. Montrer que $|a_n[\leq 4^n$ pour tout n.

g. Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?