FONCTIONS VECTORIELLES

I. Dérivée en un point, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On considère ici des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Une telle fonction f peut être interprétée comme une **courbe paramétrée**, i.e. un point M de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ se déplace en fonction d'un paramètre t, on a donc $M = f(t)$. Dans une **interprétation cinématique**, le paramètre t peut être appelé "**temps**", on étudie donc le comportement d'un **point mobile**, ce que l'on peut aussi appeler un **mouvement**. L'ensemble-image $f(I)$, i.e. l'ensemble des positions prises par le point mobile $M = f(t)$, est la **trajectoire** de ce mouvement.

Un exemple bien connu est celui de $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$\forall t \in [0, 2\pi] \qquad f(t) = \big(\cos(t), \sin(t)\big) \ .$$

On reconnaît ici le paramétrage "standard" du cercle trigonométrique $\mathcal{U}$, que l'on peut interpréter comme la donnée d'un mouvement circulaire uniforme.

De façon plus générale, nous considérerons dans ce chapitre des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Dérivée en un point

Définition I.1.1. Soit $f : I \to E$. Soit a un point de I. On dit que f est **dérivable** au point a si l'application $\tau_a : I \setminus \{a\} \to E$ définie par $\tau_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ admet une limite $l \in E$ au point a : cette limite l est alors le **vecteur dérivé** de f au point a. On note

$$l = f'(a) \ .$$

Remarque. Le vecteur $\tau_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a}$ est le **taux d'accroissement** (vectoriel) de f entre les "instants" a et t. Dans l'interprétation cinématique usuelle, si $\overrightarrow{OM} = f(t)$ représente la position d'un point mobile M à l'instant t, alors le vecteur $f'(a)$ est le **vecteur vitesse instantanée** à l'instant a.

Interprétation graphique. Lorsque le vecteur dérivé $f'(a)$ est non nul, la droite affine $\mathcal{T}$ de E passant par le point $A = f(a)$ et dirigée par le vecteur $f'(a)$ est appelée la **tangente** à l'arc paramétré $f : I \to E$ au point A. Cette droite $\mathcal{T}$ est donc l'ensemble des points M de E pouvant s'écrire sous la forme $M = f(a) + \lambda\, f'(a)$ avec λ réel, ou encore tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\, f'(a)$ avec λ réel.

Théorème I.1.2. L'application f est dérivable au point a si et seulement si il existe un vecteur l de E tel que

$$f(t) = f(a) + (t - a)\, l + r(t) \ ,$$

où $t \mapsto r(t)$ est une fonction vectorielle négligeable devant $t - a$ au voisinage de a.

Preuve. Si cette condition est réalisée, on peut écrire $r(t) = (t - a)\,\varepsilon(t)$, où $t \mapsto \varepsilon(t)$ est une fonction vectorielle telle que $\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0_E$; pour $t \in I \setminus \{a\}$, on a alors $\tau_a(t) = \dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} = l + \varepsilon(t) \underset{t\to a}{\longrightarrow} l$, donc f est dérivable au point a avec $f'(a) = l$.

Réciproquement, si f est dérivable au point a, alors $\dfrac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) + \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to a} \varepsilon(t) = 0_E$, donc $f(t) = f(a) + (t - a)\, f'(a) + (t - a)\, \varepsilon(t)$.

Autrement dit:

La dérivabilité de f au point a équivaut à l'existence d'un développement limité à l'ordre un, qui s'écrit alors

$$f(t) = f(a) + (t-a)\, f'(a) + o(t-a)\ .$$

Une conséquence facile de ce théorème est :

Proposition I.1.3. Si $f : I \to E$ est dérivable en un point a, alors f est continue au point a.

Si a est un point intérieur à I, on définit les notions de **dérivabilité à gauche** ou **à droite** en a comme pour les fonctions à valeurs réelles.

2. Dérivabilité et classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle

Une fonction $f : I \to E$ est **dérivable sur** I si elle est dérivable en tout point de I. On définit alors son **application dérivée** $f' : I \to E$, notée aussi $\mathrm{D}f$, ou encore $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le nom donné à la variable.

Définition I.2.1. On dit que l'application $f : I \to E$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ (ou **continûment dérivable**) sur I si elle est dérivable sur I et si l'application dérivée f' est continue sur I.

Proposition I.2.2. **L'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des fonctions dérivables de I vers E, ainsi que l'ensemble $\mathcal{C}^1(I, E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ de I vers E, sont des sous-espaces vectoriels de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$ de toutes les applications de I vers E.**

Preuve. En effet, on montre sans peine que, si f et g sont deux fonctions dérivables (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) de I vers E et si λ et μ sont deux scalaires (éléments de $\mathbb{K}$), alors l'application $\lambda f + \mu g$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur I, et on a de plus la propriété de **linéarité de la dérivation** *:*

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{D}f + \mu\, \mathrm{D}g\ .$$

3. Composition par une application linéaire, bilinéaire ou multilinéaire

Théorème I.3.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f : I \to E$ une application dérivable, soit $L : E \to F$ une application linéaire. Alors l'application $g = L \circ f : I \to F$ est dérivable sur I et on a

$$(L \circ f)' = L \circ f'\ , \qquad \text{soit} \qquad \forall t \in I \quad g'(t) = (L \circ f)'(t) = L\big(f'(t)\big)\ .$$

Preuve. Fixons $a \in I$; pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on a

$$\frac{g(t) - g(a)}{t - a} = \frac{L\big(f(t)\big) - L\big(f(a)\big)}{t - a} = L\left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a}\right)$$

par linéarité de L. Or, par hypothèse, $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a)$, et l'application L est continue (car linéaire en dimension finie) ; par "composition de limites", on obtient donc $\displaystyle\lim_{t \to a} \frac{g(t) - g(a)}{t - a} = L\big(f'(a)\big)$, ce qu'il fallait démontrer.

Théorème I.3.2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f : I \to E$, $g : I \to F$ deux applications dérivables, soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire. Alors l'application $h : I \to G$ définie par $\forall t \in I$ $h(t) = B\big(f(t), g(t)\big)$ est dérivable sur I et on a

$$\forall t \in I \quad h'(t) = B\big(f'(t), g(t)\big) + B\big(f(t), g'(t)\big) \; ,$$

ce que l'on abrégera en $\big(B(f,g)\big)' = B(f',g) + B(f,g')$.

Preuve. Fixons $a \in I$, soit $t \in I \setminus \{a\}$. La bilinéarité de B permet d'écrire

$$\frac{h(t)-h(a)}{t-a} = \frac{B\big(f(t),g(t)\big) - B\big(f(a),g(a)\big)}{t-a} = B\Big(\frac{f(t)-f(a)}{t-a}, g(t)\Big) + B\Big(f(a), \frac{g(t)-g(a)}{t-a}\Big) \; .$$

Il ne reste plus au lecteur qu'à faire tendre t vers a en utilisant la continuité de B (application bilinéaire en dimension finie) et la conclusion vient.

Les applications de ces théorèmes sont nombreuses:

• Si $f : I \to E$ est une fonction vectorielle, si $u : I \to \mathbb{K}$ est une fonction scalaire, toutes deux supposées dérivables, alors la fonction $uf : I \to E$ est dérivable et $(uf)' = u'f + uf'$.

• Si E est un espace euclidien, si $f, g : I \to E$ sont dérivables, alors $(f|g)$ est dérivable et $(f|g)' = (f'|g) + (f|g')$. En particulier, $\big(\|f\|^2\big)' = (f|f)' = 2(f|f')$ et, si $e : I \to E$ est dérivable et unitaire ($\forall t \in I \quad \|e(t)\| = 1$), alors, pour tout $t \in I$, les vecteurs $e(t)$ et $e'(t) = \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}$ sont orthogonaux puisque $2\,\big(e(t)|e'(t)\big) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\big\|e(t)\big\|^2\Big) = 0$.

• En cinématique, si un mouvement $t \mapsto M(t)$, de classe $\mathcal{C}^2$, est **uniforme**, c'est-à-dire si $\left\|\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\right\|$ est constant, alors le vecteur accélération $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}$ est orthogonal au vecteur vitesse $\overrightarrow{v} = \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$. Un mouvement de classe $\mathcal{C}^2$ est **accéléré** ($\|\overrightarrow{v}\|$ croît) si et seulement si $(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{a}) \geq 0$, **retardé** ($\|\overrightarrow{v}\|$ décroît) si et seulement si $(\overrightarrow{v}|\overrightarrow{a}) \leq 0$.

• Si E est un plan, si $\mathcal{B}$ est une base de ce plan, si $u, v : I \to E$ sont des applications dérivables, alors l'application $f : I \to \mathbb{K}$ définie par $f(t) = \det_{\mathcal{B}}\big(u(t), v(t)\big)$ est dérivable et on a

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = \det_{\mathcal{B}}\big(u'(t), v(t)\big) + \det_{\mathcal{B}}\big(u(t), v'(t)\big) \; .$$

En particulier, si E est un plan euclidien orienté, avec les mêmes notations, on a, pour le produit mixte, la relation

$$\big([u,v]\big)' = [u',v] + [u,v'] \; .$$

• Si E est un espace euclidien orienté de dimension trois, si f et g sont des applications dérivables de I vers E, alors l'application $f \wedge g$, de I vers E, est dérivable, et

$$(f \wedge g)' = f' \wedge g + f \wedge g' \; .$$

• Si $A : I \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B : I \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sont deux applications dérivables (matrices dont les coefficients dépendent du "temps"), alors l'application $C : I \to \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ définie par $C(t) = A(t)\,B(t)$ est dérivable sur I et $C' = (AB)' = A'B + AB'$.

En particulier, si $A(t)$ est une matrice carrée d'ordre n et $X(t)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$, identifié à une matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a $(AX)' = A'X + AX'$. Si la matrice carrée A est à coefficients constants, cela donne simplement $(AX)' = A\,X'$.

<u>Généralisation.</u>

<u>Théorème I.3.3.</u> Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, soient f_1, $\cdots$, f_p des applications dérivables de I vers E, soit $M : E^p \to F$ une application p-linéaire. Alors l'application $g : I \to F$ définie par $\forall t \in I \quad g(t) = M\big(f_1(t), \cdots, f_p(t)\big)$ est dérivable, avec

$$\forall t \in I \qquad g'(t) = \sum_{i=1}^{p} M\big(f_1(t), \cdots, f_{i-1}(t), f_i'(t), f_{i+1}(t), \cdots, f_p(t)\big)\ .$$

Ce théorème est admis.

On écrira $\big(M(f_1, \cdots, f_p)\big)' = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} M(f_1, \cdots, f_{i-1}, f_i', f_{i+1}, \cdots, f_p)$.

On a, bien sûr, une application aux déterminants:

Si E est un espace vectoriel de dimension n, si $\mathcal{B}$ est une base de E, si x_1, $\cdots$, x_n sont n fonctions dérivables de I vers E, si on pose $D(t) = \det_{\mathcal{B}}\big(x_1(t), \cdots, x_n(t)\big)$, alors $D : I \to \mathbb{K}$ est dérivable et

$$\forall t \in I \qquad D'(t) = \sum_{j=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}\big(x_1(t), \cdots, x_{j-1}(t), x_j'(t), x_{j+1}(t), \cdots, x_n(t)\big)\ .$$

<u>4. Utilisation des coordonnées dans une base</u>

• Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, à toute application $f : I \to E$, on associe ses **fonctions coordonnées** f_i $(1 \leq i \leq n)$ telles que, pour tout t de I, on ait $f(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(t)\,e_i$. Alors la fonction vectorielle f est dérivable si et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la fonction numérique f_i est dérivable et, dans ce cas, on a $f'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i'(t)\,e_i$ (les coordonnées de f' sont les dérivées des coordonnées de f).

<u>Preuve</u>. *On a en effet $f_i = L_i \circ f$, où L_i est la i-ème forme linéaire coordonnée sur E relativement à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire l'application qui, à tout vecteur x de E, associe sa i-ème coordonnée x_i dans la base $\mathcal{B}$. Cela justifie la dérivabilité de f_i si f est supposée dérivable, et la formule $f_i' = (L_i \circ f)' = L_i \circ f'$ puisque L_i est linéaire en utilisant le* **théorème I.3.1.**, *donc les coordonnées de f' sont les dérivées des coordonnées de f.*

Réciproquement, si les fonctions coordonnées f_i sont dérivables, alors la fonction vectorielle f est dérivable comme somme des fonctions dérivables $t \mapsto f_i(t)\,e_i$.

<u>Théorème I.4.1.</u> Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soient $f : I \to E$ et $\varphi : J \to I$ deux applications dérivables. Alors l'application $g = f \circ \varphi : J \to E$ est dérivable et on a $g' = (f \circ \varphi)' = \varphi'\,(f' \circ \varphi)$, autrement dit

$$\forall s \in J \qquad g'(s) = \varphi'(s)\ f'\big(\varphi(s)\big)\ .$$

Preuve. *Il suffit de travailler sur les fonctions coordonnées dans une quelconque base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E. Avec des notations évidentes, on a $g_i = f_i \circ \varphi$ pour tout i, donc $g_i'(s) = \varphi'(s)\, f_i'\big(\varphi(s)\big)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ d'après le cours de première année.*

II. Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

1. Définition

Soit $f : I \to E$. On définit les dérivées successives de f par récurrence : $f^{(0)} = f$ par convention puis, pour tout entier naturel n, si $f^{(n)}$ est définie et est elle-même dérivable, $f^{(n+1)} = \big(f^{(n)}\big)'$. On utilise aussi les notations $\mathrm{D}^k f$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}t^k}$ pour la dérivée d'ordre k.

Définition II.1.1. Soit $f : I \to E$, soit $k \in \mathbb{N}$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^k$** sur I si f est k fois dérivable sur I, la fonction dérivée k-ième $f^{(k)}$ étant continue sur I. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^\infty$** (ou **indéfiniment dérivable**) sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^k$ si et seulement si ses fonctions coordonnées f_i dans la base $\mathcal{B}$ sont de classe $\mathcal{C}^k$ et on a alors $f^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(k)}(t) e_i$.

2. Opérations algébriques

Proposition II.2.1. Pour tout k avec $0 \leq k \leq +\infty$, l'ensemble $\mathcal{C}^k(I, E)$ des applications de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers E est un s.e.v. de l'espace $\mathcal{F}(I, E)$ de toutes les fonctions de I vers E.

C'est une conséquence immédiate de la linéarité de la dérivation. On a, bien sûr, pour $\alpha \in \mathbb{K}$, $\beta \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^k(I, E)$, $g \in \mathcal{C}^k(I, E)$, la relation $(\alpha f + \beta g)^{(k)} = \alpha f^{(k)} + \beta g^{(k)}$.

Dans le cas où l'une des deux fonctions est à valeurs scalaires, nous avons :

Proposition II.2.2. Soient $f : I \to E$ et $u : I \to \mathbb{K}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^n$, alors la fonction $uf : I \to E$ est de classe $\mathcal{C}^n$sur I et on a

$$(uf)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\, u^{(k)}\, f^{(n-k)} \qquad (\textbf{formule de Leibniz})\ .$$

La preuve se fait par récurrence sur n, et est formellement analogue à la démonstration de la formule du binôme de Newton : pour l'hérédité, on utilise la **relation de Pascal** $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$.

Exercice 1. On pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & \\ x^2/2! & x & 1 & (0) & \\ x^3/3! & x^2/2! & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \cdots & & x^2/2! & x \end{vmatrix}_{(n)}$. Montrer que $D_n' = D_{n-1}$.

En déduire l'expression du déterminant $D_n(x)$.

Exercice 2. Soit $A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application dérivable. On suppose que, pour tout $t \in I$, la matrice $A(t)$ est orthogonale. Montrer que, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in I$, les vecteurs $A(t)X$ et $A'(t)X$ sont orthogonaux.

Exercice 3. Soient $U : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $V : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux applications. On suppose que U est continue et que, pour tout $t \in I$, la matrice $U(t)$ est antisymétrique. On suppose aussi que V est de classe $\mathcal{C}^1$, que $V(0) = I_n$ et que

$$\forall t \in I \qquad V'(t) = U(t)\, V(t)\ .$$

Montrer que, pour tout $t \in I$, la matrice $V(t)$ est orthogonale.