Normes, suites convergentes.

1. Soient N et N' deux normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

a. On note B et B' les boules unités fermées, i.e.

$$B = \big\{x \in E \mid N(x) \leq 1\big\} \qquad \text{et} \qquad B' = \big\{x \in E \mid N'(x) \leq 1\big\} .$$

Montrer que $B = B' \Longrightarrow N = N'$.

b. Même question avec les boules unités ouvertes.

- -

a. Si $x = 0_E$, on a évidemment $N(x) = N'(x) = 0$.

Sinon, notons que, si λ est un réel positif, alors

$$\lambda x \in \overline{B} \iff \lambda\, N(x) \leq 1 \iff \lambda \leq \frac{1}{N(x)} ,$$

donc $\big\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\big\} = \left[0, \dfrac{1}{N(x)}\right]$, et $\dfrac{1}{N(x)} = \max\big\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in \overline{B}\big\}$. Il est maintenant clair que, si $\overline{B} = \overline{B}'$, alors $\dfrac{1}{N(x)} = \dfrac{1}{N'(x)}$, donc $N(x) = N'(x)$.

b. Si $x \in E$ est non nul, on a maintenant $\big\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\big\} = \left[0, \dfrac{1}{N(x)}\right[$, on en déduit que $\dfrac{1}{N(x)} = \sup\big\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \lambda x \in B\big\}$ et on conclut de la même façon.

---

2. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N(x, y) = \max\limits_{t\in[0,1]} |x + ty|$.

a. Montrer que l'application N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

b. Soit B la boule unité fermée de centre 0_E pour la norme N. Montrer que $B = \bigcap\limits_{t\in[0,1]} B_t$, avec $B_t = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; |x + ty| \leq 1\big\}$. Montrer que $B = B_0 \cap B_1$. Dessiner B.

- -

a. L'application N est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $N(x, y) = 0$, alors $|x+ty| = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc en particulier pour $t = 0$ ce qui donne $x = 0$, puis pour $t = 1$ ce qui donne alors $y = 0$, donc $(x, y) = (0, 0)$, on a ainsi vérifié l'axiome de séparation.

Si λ est un réel, on a

$$N\big(\lambda(x, y)\big) = N(\lambda x, \lambda y) = \max_{t\in[0,1]} |\lambda x+t\lambda y| = \max_{t\in[0,1]} \big(|\lambda|\,|x+ty|\big) = |\lambda| \max_{t\in[0,1]} |x+ty| = |\lambda|\,N(x, y) ,$$

on a ainsi montré l'homogénéité. Enfin,

$$\begin{aligned}
N\big((x, y) + (x', y')\big) &= N(x + x', y + y') \\
&= \max_{t\in[0,1]} \big|x + x' + t(y + y')\big| \\
&= \max_{t\in[0,1]} \big|(x + ty) + (x' + ty')\big| \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \big(|x + ty| + |x' + ty'|\big) \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} |x + ty| + \max_{t\in[0,1]} |x' + ty'| \;=\; N(x, y) + N(x', y') ,
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité triangulaire.

b. On a

$$\begin{aligned}(x,y)\in B &\iff \max_{t\in[0,1]}|x+ty|\leq 1\\ &\iff \forall t\in[0,1]\quad |x+ty|\leq 1\\ &\iff \forall t\in[0,1]\quad (x,y)\in B_t\\ &\iff (x,y)\in\bigcap_{t\in[0,1]} B_t\ ,\end{aligned}$$

ce qui montre la première égalité d'ensembles. Il est alors clair que $B=\bigcap_{t\in[0,1]} B_t\subset B_0\cap B_1$.

Par ailleurs, si $(x,y)\in B_0\ \cap\ B_1$, alors $|x|\leq 1$, $|x+y|\leq 1$, donc pour tout $t\in[0,1]$,

$$|x+ty|=\big|(1-t)x+t(x+y)\big|\leq(1-t)|x|+t|x+y|\leq(1-t)+t=1\ ,$$

donc $(x,y)\in\bigcap_{t\in[0,1]} B_t=B$, ce qui prouve que $B=B_0\ \cap\ B_1$.

Remarque. En s'inspirant du calcul ci-dessus, on aurait pu prouver dès le départ que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $N(x,y)=\max\big\{|x|,|x+y|\big\}$, ce qui rendait l'exercice plus facile!

Il est facile de construire graphiquement B_0 (bande verticale définie par $-1\leq x\leq 1$) et B_1 (bande oblique définie par $-1\leq x+y\leq 1$) et d'en déduire B, qui est un parallélogramme plein.

---

3. Pour toute matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|A\|=\max_{1\leq i\leq n}\Big(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\Big)$.

a. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b. Montrer que l'on a $\|AB\|\leq\|A\|\,\|B\|$ pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

c. Pour tout $X=\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_n\end{pmatrix}^\top\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$. Prouver la relation $\|AX\|_\infty\leq\|A\|\,\|X\|_\infty$.

d. Montrer que toute valeur propre réelle λ de la matrice A vérifie $|\lambda|\leq\|A\|$.

- -

a. On a bien sûr $\|A\|\geq 0$, et si $\|A\|=0$, alors $\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|$ est nul pour tout i, ce qui entraîne que $a_{i,j}$ est nul pour tout i et pour tout j (une somme de réels positifs est nulle **ssi** chaque terme est nul), on a ainsi prouvé l'axiome de séparation. L'homogénéité est une simple formalité. Pour l'inégalité triangulaire, on utilise d'abord l'inégalité triangulaire sur la valeur absolue dans $\mathbb{R}$: $|a_{i,j}+b_{i,j}|\leq|a_{i,j}|+|b_{i,j}|$, d'où , pour tout $i\in[\![1,n]\!]$,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}+b_{i,j}|\leq\sum_{j=1}^{n}\big(|a_{i,j}|+|b_{i,j}|\big)=\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|+\sum_{j=1}^{n}|b_{i,j}|\leq\|A\|+\|B\|\ .$$

En passant au max, on obtient l'inégalité $\|A+B\|\leq\|A\|+\|B\|$.

b. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $c_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ puis, pour tout i,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \Big| \leq \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k} b_{k,j}| \Big) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \Big(|a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \big(|a_{i,k}| \, \|B\| \big) \\
&\leq \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leq \|A\| \, \|B\| \, .
\end{aligned}$$

Certaines des inégalités ci-dessus sont systématiquement des égalités, mais il m'a semblé plus clair de le présenter ainsi.

La majoration obtenue ci-dessus étant vraie pour tout i, elle reste vraie pour le maximum, donc $\|C\| = \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

c. Posons $AX = Y = (\, y_1 \quad \cdots \quad y_n \,)^T$, alors $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ pour tout i, donc

$$|y_i| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \, |x_j| \leq \Big(\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \Big) \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leq \|A\| \, \|X\|_\infty \, .$$

Cette inégalité étant vraie pour tout i, on a prouvé que $\|Y\|_\infty = \|AX\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$.

d. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_\infty = \|\lambda X\|_\infty = |\lambda| \, \|X\|_\infty \leq \|A\| \, \|X\|_\infty$, d'où $|\lambda| \leq \|A\|$ puisque $\|X\|_\infty$ est un réel strictement positif.

---

4. Soit $E = \mathcal{C}^1\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left(f(0)^2 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)^2 \, \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}}$.

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Soit $f \in E$. Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x)^2 \leq 2\, f(0)^2 + 2 \left(\int_0^x |f'(t)| \, \mathrm{d}t \right)^2 .$$

c. En déduire que, pour tout $f \in E$, on a $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}\, N(f)$.

- -

a. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(f|g) = f(0)\, g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)\, g'(t) \, \mathrm{d}t$, et on vérifie qu'il s'agit d'un produit scalaire (*on détaillera notamment le caractère défini positif*). Comme $N(f) = \sqrt{(f|f)}$, on déduit que N est une norme sur E.

b. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a $f(x) = f(0) + \displaystyle\int_0^x f'(t) \, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in [0,1]$.Or, quels que soient les réels a et b, on a l'inégalité "classique" $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ (preuve facile, résulte de $(a-b)^2 \geq 0$), on en déduit que

$$f(x)^2 = \Big(f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 \le 2\,f(0)^2 + 2\,\Big(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2 .$$

Continuons à majorer : comme

$$\Big|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \le \int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t ,$$

on a finalement $f(x)^2 \le 2\,f(0)^2 + 2\,\left(\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2$.

c. Continuons à majorer, d'abord avec $\displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t \le \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ car l'intégrande est positif, puis en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_0^1 |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\right)\,\left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t .$$

On a finalement, pour tout $x \in [0,1]$,

$$f(x)^2 \le 2\,f(0)^2 + 2\int_0^1 f'(t)^2\,\mathrm{d}t = 2\,N(f)^2 ,$$

soit $\|f\|_\infty^2 \le 2\,N(f)^2$, ou encore $\|f\|_\infty \le \sqrt{2}\,N(f)$.

5.a. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \big|P^{(k)}(k)\big|$. Montrer que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

b. Soient $n+1$ réels $a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n$ tels que $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad P^{(k)}(k) = a_k$. Montrer que cela détermine le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- -

a. D'abord $N(P)$ est une somme finie: si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $N(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k)\big|$.

On a clairement $N(P) \ge 0$ et, si P est un polynôme non nul, notons n son degré et a_n son coefficient dominant ($a_n \ne 0$), alors $P^{(n)} = n!\,a_n$ (polynôme constant), donc $N(P) \ge \big|P^{(n)}(n)\big| = n!\,|a_n| > 0$, ce qui prouve l'axiome de séparation.

L'homogénéité $N(\lambda P) = |\lambda|\,N(P)$ est immédiate.

Enfin, si $n \ge \max\big\{\deg(P), \deg(Q)\big\}$, alors

$$N(P+Q) = \sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k) + Q^{(k)}(k)\big| \le \sum_{k=0}^{n} \big|P^{(k)}(k)\big| + \sum_{k=0}^{n} \big|Q^{(k)}(k)\big| = N(P) + N(Q) ,$$

et on a prouvé l'inégalité triangulaire.

b. L'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \varphi(P) = \Big(P(0), P'(1), P''(2), \cdots, P^{(n)}(n)\Big)$$

est linéaire et injective: *en effet, on a vu en* **a.** *que, si P est non nul de degré d, alors $P^{(d)}(d) \neq 0$, donc $\varphi(P) \neq 0$*, elle est donc bijective (isomorphisme) puisque $\dim\Big(\mathbb{R}_n[X]\Big) = \dim\Big(\mathbb{R}^{n+1}\Big)$. Tout $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de réels admet donc un unique antécédent par φ dans $\mathbb{R}_n[X]$, ce qu'il fallait démontrer.

---

6. Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ et $a \in [0,1]$, on pose

$$N_a(P) = \big|P(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t \,.$$

a. Montrer que, pour tout $a \in [0,1]$, N_a est une norme sur E.

b. Soit $(a,b) \in [0,1]^2$. Montrer que les normes N_a et N_b sur E sont équivalentes.

- -

a. Il est clair que $N_a(P) \geq 0$ pour tout $P \in E$.

Si $N_a(P) = 0$, alors $P(a) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t = 0$ (deux termes positifs dont la somme est nulle). Comme $|P'|$ est une fonction continue positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on a alors $P' = 0$ sur $[0,1]$ d'après le théorème de stricte positivité. Donc P est constante sur $[0,1]$, elle y est nulle puisque $P(a) = 0$. Enfin, le polynôme P ayant une infinité de racines, c'est le polynôme nul. On a ainsi prouvé l'axiome de séparation.

L'axiome d'homogénéité $N_a(\lambda P) = |\lambda|\, N_a(P)$ est immédiat.

Enfin, l'inégalité triangulaire est facile:

$$\begin{aligned} N_a(P+Q) &= \big|P(a) + Q(a)\big| + \int_0^1 \big|P'(t) + Q'(t)\big| \,\mathrm{d}t \\ &\leq \big|P(a)\big| + \big|P(b)\big| + \int_0^1 \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t + \int_0^1 \big|Q'(t)\big| \,\mathrm{d}t \;=\; N_a(P) + N_a(Q) \,. \end{aligned}$$

b. Soient a et b dans $[0,1]$. Alors, pour tout $P \in E$, on a $N_b(P) = N_a(P) + \big|P(b)\big| - \big|P(a)\big|$. Or, par le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire, puis par l'inégalité triangulaire intégrale,

$$\big|P(b)\big| - \big|P(a)\big| \leq \big|P(b) - P(a)\big| = \left|\int_a^b P'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_{\min\{a,b\}}^{\max\{a,b\}} \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t \,.$$

On en déduit que

$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 \big|P'(t)\big| \,\mathrm{d}t \leq 2\, N_a(P) \,.$$

Par symétrie des rôles de a et b, on déduit que

$$\forall P \in E \qquad N_b(P) \leq 2\, N_a(P) \leq 4\, N_b(P) \,,$$

les normes N_a et N_b sur E sont donc équivalentes.

---

7. Soient $f_1, \cdots, f_n$ des applications continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. À quelle condition l'application $N : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{K}^n$?

- -

Une condition nécessaire est que la famille de fonctions $(f_1, \cdots, f_n)$ soit libre dans $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe des coefficients non tous nuls $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$, et alors $N(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = 0$, ce qui nie l'axiome de séparation.

Cette condition est aussi suffisante. En effet, si elle est satisfaite, alors N est bien une application de $\mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\begin{aligned} N(x_1, \cdots, x_n) = 0 \quad &\iff \quad \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty = 0 \iff x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n = 0 \\ &\iff \quad (x_1, \cdots, x_n) = (0, \cdots, 0) \end{aligned}$$

par liberté de la famille. De plus, si $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, alors

$$N(\lambda x) = \big\|\lambda(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n)\big\|_\infty = |\lambda|\ \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty = |\lambda|\ N(x)\ ,$$

et

$$\begin{aligned} N(x+y) \quad &= \quad \big\|(x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n) + (y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n)\big\| \\ &\leq \quad \|x_1 f_1 + \cdots + x_n f_n\|_\infty + \|y_1 f_1 + \cdots + y_n f_n\|_\infty \ = \ N(x) + N(y)\ , \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme (que l'on connaît, dite "de la convergence uniforme") sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$.

---

8. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que

$$\forall x \in E \qquad \|u(x)\| \leq \|x\|\ .$$

Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$.

- -

Posons $F = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $G = \mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E)$, on sait que $\dim E = \dim F + \dim G$ (théorème du rang). Pour démontrer que ces deux sous-espaces sont supplémentaires, il suffit donc de montrer qu'ils sont en somme directe, c'est-à-dire que $F \cap G = \{0_E\}$.

Soit donc $x \in F \cap G$, on a alors $u(x) = x$ et il existe $y \in E$ tel que $x = u(y) - y$. On a alors $u(y) = x + y$, puis

$$u^2(y) = u\big(u(y)\big) = u(x) + u(y) = x + (x+y) = 2x + y\ ,$$

puis, par une récurrence immédiate, $u^n(y) = n\,x + y$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De l'hypothèse de l'énoncé (l'application u est 1-lipschitzienne), on déduit que $\|u^n(y)\| \leq \|y\|$: la suite $\big(\|u^n(y)\|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais, si on avait $x \neq 0_E$, le "côté obscur" de l'inégalité triangulaire donnerait

$$\|u^n(y)\| = \|nx + y\| \geq \big|\|nx\| - \|y\|\big| \geq n\,\|x\| - \|y\| \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad +\infty\ ,$$

ce qui est contradictoire. On a donc nécessairement $x = 0_E$, ce qui termine l'exercice.

Topologie.

9. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, soit $M = \sup(A)$ sa borne supérieure.

a. Montrer que $M \in \overline{A}$.

b. Montrer que M est le seul majorant de la partie A qui soit adhérent à A.

- -

a. Si $M = \sup(A)$, comme M est le plus petit majorant de la partie A, alors pour tout n entier naturel non nul, le réel $M - \dfrac{1}{n}$ ne majore pas la partie A, il existe donc un élément x_n de A tel que $M - \dfrac{1}{n} < x_n \leq M$. De cet encadrement, il résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = M$, on a donc constuit une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers M, le réel M est donc adhérent à la partie A.

b. Si M' est un majorant de la partie A autre que $M = \sup(A)$, alors M' n'est pas le plus petit majorant de A, il existe donc un réel strictement positif ε tel que $M' - \varepsilon$ majore la partie A. Si (x_n) est une suite d'éléments de A, on a alors $x_n \leq M' - \varepsilon$ pour tout n, cette suite (x_n) ne peut alors converger vers M', le réel M' n'est donc pas adhérent à la partie A.

---

10. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que tout sous-espace vectoriel de E est une partie fermée de E.

- -

Soit F un sous-espace de E, soit G un supplémentaire de F dans E, notons p le projecteur sur G parallèlement à F. Alors $p : E \to E$ est une application continue (application linéaire en dimension finie), et $F = \mathrm{Ker}(p) = p^{-1}\big(\{0_E\}\big)$; Le singleton $\{0_E\}$ est une partie fermée de E, son image réciproque F est alors aussi une partie fermée de E.

---

11. Soit E un espace vectoriel normé, soit F un sous-espace vectoriel de E.

Deux questions indépendantes

a. Montrer que l'adhérence $\overline{F}$ de F est un sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que, si F admet un point intérieur, alors $F = E$.

- -

a. Il est clair que $0_E \in F \subset \overline{F}$, donc $\overline{F} \neq \emptyset$. Par ailleurs, soient x et y deux points de $\overline{F}$, soient λ et μ deux scalaires : par caractérisation séquentielle des points adhérents, on sait qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de F convergeant vers x et y respectivement. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y$ (opérations algébriques sur les suites convergentes) et, comme $\lambda x_n + \mu y_n \in F$ pour tout n, on en déduit que $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$. L'ensemble $\overline{F}$ est donc stable par combinaisons linéaires, ce qu'il fallait démontrer.

b. Soit a un point intérieur à F, il existe donc $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset F$; on a alors

$B(0_E,r)\subset F$: en effet, si $x\in B(0_E,r)$, on écrit $x=(a+x)-a$ avec $\begin{cases} a & \in B(a,r) \subset F \\ a+x & \in B(a,r) \subset F \end{cases}$ et, comme F est un sous-espace vectoriel de E, on déduit $x\in F$. Le point 0_E est donc intérieur au s.e.v. F. Si on prend $x\in E$ non nul, alors le vecteur $y=\dfrac{r}{2\|x\|}x$ a pour norme $\dfrac{r}{2}$, donc il appartient à F et, comme F est un s.e.v., on a $x=\dfrac{2\,\|x\|}{r}\,y\in F$. Donc $F=E$.

Par contraposition, on a montré que tout sous-espace vectoriel strict de E est d'intérieur vide.

---

12. Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

a. Montrer que son adhérence $\overline{A}$ est convexe.

b*. Montrer que son intérieur $\overset{\circ}{A}$ est convexe.

- -

a. Soient $x\in\overline{A}$ et $y\in\overline{A}$, on doit montrer que $z=(1-t)x+ty\in\overline{A}$ pour tout $t\in[0,1]$. Or, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers x, et une suite (y_n) d'éléments de A qui converge vers y. Si on pose $z_n=(1-t)x_n+ty_n$, alors par opérations sur les suites convergentes, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=(1-t)x+ty=z$. Mais, A étant convexe, on a $z_n\in A$ pour tout n, donc $z=\lim\limits_{n\to+\infty} z_n\in\overline{A}$.

b. Soient $x\in\overset{\circ}{A}$ et $y\in\overset{\circ}{A}$, soit $t\in[0,1]$, on doit montrer que $z=(1-t)x+ty\in\overset{\circ}{A}$. Or, il existe $r'>0$ et $r''>0$ tels que les boules $B(x,r')$ et $B(y,r'')$ soient incluses dans A. En posant $r=\min\{r',r''\}$, on a $r>0$, $B(x,r)\subset A$ et $B(y,r)\subset A$. Montrons que $B(z,r)\subset A$.

Soit donc $z'\in B(z,r)$, on a alors $z'=z+u$ avec $\|u\|<r$. Si l'on pose $x'=x+u$ et $y'=y+u$, alors $\|x'-x\|=\|y'-y\|=\|u\|<r$, donc $x'\in B(x,r)$ et $y'\in B(y,r)$. Les points x' et y' sont alors tous deux dans A. Il reste à voir (*faire un dessin!*) que

$$(1-t)x'+ty'=(1-t)(x+u)+t(y+u)=\big((1-t)x+ty\big)+u=z+u=z'\ .$$

Comme A est convexe, on déduit que $z'\in A$. On a finalement $B(z,r)\subset A$, ce qui montre que le point z est intérieur à A, i.e. $z\in\overset{\circ}{A}$, ce qu'il fallait prouver.

---

13. Montrer qu'une partie A d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est convexe si et seulement si, pour tout couple $(x,y)\in E^2$, l'ensemble $I_{x,y}=\{\lambda\in\mathbb{R}\mid x+\lambda y\in A\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

- -

Rappelons d'abord que, dans $\mathbb{R}$, les intervalles sont les parties convexes, autrement dit une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall(\lambda,\mu)\in I^2\quad\forall t\in[0,1]\qquad(1-t)\lambda+t\mu\in I$$

(*on peut toujours supposer* $\lambda<\mu$).

Soit alors A une partie d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

• Supposons A convexe. Soient $x\in E$ et $y\in E$, soient $\lambda\in I_{x,y}$, soit $\mu\in I_{x,y}$, soit $t\in[0,1]$. On a par hypothèse $x+\lambda y\in A$ et $x+\mu y\in A$. Puis

$$x + \big((1-t)\lambda + t\mu\big)\, y = (1-t)(x+\lambda y) + t\,(x+\mu y) \in A$$

puisque A est supposé convexe. Ainsi, la partie $I_{x,y}$ de $\mathbb{R}$ est convexe, c'est donc un intervalle.

• Suppons que, pour tout couple $(x,y) \in E^2$, $I_{x,y}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Choisissons x et y dans A, alors $0 \in I_{x,y-x}$ et $1 \in I_{x,y-x}$. Comme $I_{x,y-x}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il contient le segment $[0,1]$. On a donc, pour tout $t \in [0,1]$, $t \in I_{x,y-x}$, i.e. $x+t(y-x) = (1-t)x+ty \in A$, donc la partie A de E est convexe.

Limites et continuité des fonctions vectorielles de variable vectorielle

14. Étudier la limite éventuelle en $(0,0)$ des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$ ci-dessous:

a. $(x,y) \mapsto \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$; **b.** $(x,y) \mapsto \dfrac{xy}{x^4+y^4}$; **c.** $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

- -

a. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on observe que

$$\big|f(r\cos\theta, r\sin\theta)\big| = r\,\big|\cos^3\theta + \sin^3\theta\big| \le 2\,r = 2\sqrt{(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2}\ ,$$

donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, on a $0 \le \big|f(x,y)\big| = \big|f(x,y) - 0\big| \le 2\,\big\|(x,y)\big\|_2$. Comme $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \big\|(x,y)\big\|_2 = 0$, on déduit par encadrement que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

b. Pour $x \neq 0$, on a $f(x,x) = \dfrac{1}{2x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$, donc f n'a pas de limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$, même pas de limite infinie puisque, pour $x \neq 0$, $f(x,0) = 0$.

c. Pour $x \neq 0$, on a $f(x,0) = 0$ et $f(x,x^2) = \dfrac{1}{2}$. Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$. En effet, les suites $\left(\dfrac{1}{n}, 0\right)$ et $\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right)$ tendent toutes deux vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, et les suites images, de terme général respectivement $f\left(\dfrac{1}{n}, 0\right) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}\right) = \dfrac{1}{2}$, ont des limites différentes.

---

15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ si $x \neq y$, et $f(x,x) = e^x$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

- -

Méthode 1. La fonction exponentielle étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer l'égalité des accroissements finis: si x et y sont deux réels, alors il existe un réel c compris entre x et y tel que $e^x - e^y = (x-y)\,e^c$ (la dérivée de la fonction exponentielle étant elle-même). Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a donc $f(x,y) = e^c$, où c est un réel compris entre x et y, et ceci reste vrai lorsque $x = y$ en prenant $c = x = y$.

En tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$, la fonction f est continue en tant que quotient de deux fonctions continues $(x,y) \mapsto e^x - e^y$ et $(x,y) \mapsto x - y$ avec un dénominateur non nul.

En un point de la forme (a,a), montrons la continuité de f par caractérisation séquentielle: soit (x_n, y_n) une suite de points de $\mathbb{R}^2$ convergeant vers (a,a), ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. Alors, pour tout n, il existe un réel c_n, compris entre x_n et y_n, tel que $f(x_n,y_n) = e^{c_n}$. Mais, par encadrement, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$, donc par continuité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = e^a = f(a,a)$, ce qu'il fallait démontrer.

Méthode 2. Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}$ si $t \neq 0$, et $\varphi(0) = 1$. Cette fonction est alors continue sur $\mathbb{R}$ (par les théorèmes d'opérations en tout point autre que 0, et aussi en 0 car c'est un “prolongement par continuité” usuel). En distinguant les cas $x \neq y$ et $x = y$, on constate que $f(x,y) = e^y\,\varphi(x-y)$ pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Donc f est directement continue sur $\mathbb{R}^2$ comme produit et composée de fonctions continues.

---

16. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k^{-1} = B$. Montrer que A est inversible et $A^{-1} = B$.

- -

On a $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k = A$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k^{-1} = B$. Par continuité du produit matriciel, on déduit $\lim\limits_{k\to+\infty} A_k A_k^{-1} = AB$. Mais, pour tout k, on a $A_k A_k^{-1} = I_n$. Donc $I_n = AB$, ce qui signifie que A est inversible et $A^{-1} = B$.

---

17. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = P$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} B^k = Q$.

a. Montrer que P et Q sont des matrices de projecteurs. Calculer AP et PA.

b. On suppose que A et B commutent. Montrer que P et Q commutent.

- -

a. Comme la suite (A^k) converge vers P, il en est de même de toute suite extraite, ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} A^{2k} = P$. Mais on a aussi $A^{2k} = A^k A^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} P^2$ par continuité du produit matriciel. Par unicité de la limite, on déduit $P^2 = P$. De même, $Q^2 = Q$.

Puisque $A^k \to P$, toujours par continuité du produit matriciel, $A\,A^k \to AP$, mais on a aussi $A\,A^k = A^{k+1} \to P$ car (A^{k+1}) est une suite extraite de (A^k). Par unicité de la limite, $AP = P$. On a de même $PA = P$.

b. Si A et B commutent, on montre par des récurrences immédiates que, pour tout k entier naturel, A commute avec B^k, et A^k commute avec B^k. Par continuité du produit matriciel, $A^k B^k \to PQ$ et $B^k A^k \to QP$. Comme $A^k B^k = B^k A^k$, par unicité de la limite, on déduit $PQ = QP$.

---

18. Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculer T^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$, avec $M_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^k$.

- -

On calcule $T^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+c) \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}$, $T^3 = \begin{pmatrix} a^3 & b(a^2+ac+c^2) \\ 0 & c^3 \end{pmatrix}$, et on conjecture que $T^k = \begin{pmatrix} a^k & b\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} a^i c^{k-1-i} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$, il ne reste plus qu'à vérifier l'hérédité. Remarquons que $T^0 = I_2$ par convention et que la formule reste vraie pour $k = 0$ en convenant qu'une somme vide vaut 0.

• Si $a = c$, on peut écrire $T^k = \begin{pmatrix} a^k & bka^{k-1} \\ 0 & a^k \end{pmatrix}$ pour $k \geq 1$, donc $M_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ 0 & u_n \end{pmatrix}$, avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$, et $v_n = b \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{ka^{k-1}}{k!} = b \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^a$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = be^a$, on a $\exp(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T^k = \lim_{n\to+\infty} M_n = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Si $a \neq c$, on a $T^k = \begin{pmatrix} a^k & b\,\dfrac{a^k - c^k}{a-c} \\ 0 & c^k \end{pmatrix}$, donc $M_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n \\ 0 & w_n \end{pmatrix}$, avec $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!}$, $v_n = \dfrac{b}{a-c} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \right)$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!}$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^a$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} w_n = e^c$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = b\,\frac{e^a - e^c}{a-c}$, on a $\exp(T) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} T^k = \lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} e^a & b\,\dfrac{e^a - e^c}{a-c} \\ 0 & e^c \end{pmatrix}$.

---

19. Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Pour tout $x \in E$, on pose $f(x) = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

On note $B = B(0_E, 1) = \big\{x \in E \;\big|\; \|x\| < 1\big\}$ la boule unité ouverte de E.

a. Montrer que f est une bijection de E sur B, expliciter f^{-1}.

b. Montrer que f et f^{-1} sont continues.

c*. Montrer que f est 1-lipschitzienne. L'apllication f^{-1} est-elle lipschitzienne ?

- -

a. On a $\big\|f(x)\big\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1$, donc $f(x) \in B$. Soit $y \in B$, si $f(x) = y$ alors $\|y\| = \dfrac{\|x\|}{1 + \|x\|}$ donc $\|x\| = \dfrac{\|y\|}{1 - \|y\|}$ puis $x = \big(1 + \|x\|\big)\, y = \dfrac{y}{1 - \|y\|}$, on vérifie!

b. C'est évident!

c. f^{-1} n'est pas lipschitzienne car elle envoie B (borné) sur E (non borné).

Soient $x \in E$, $y \in E$, alors $f(x) - f(y) = \dfrac{N}{D}$ avec

$$N = x - y + \|y\|\, x - \|x\|\, y = (x - y) + \big(\|y\| - \|x\|\big)\, x - \|x\|\, (y - x)$$

et $D = 1+\|x\|+\|y\|+\|x\|\,\|y\| \geq 1+\|x\|+\|y\|$. On majore $\|N\| \leq \big(1+2\|x\|\big)\,\|x-y\|$ et, par symétrie, $\|N\| \leq \big(1+2\|y\|\big)\,\|x-y\|$ puis, par demi-somme, $\|N\| \leq \big(1+\|x\|+\|y\|\big)\,\|x-y\|$. Finalement, $\big\|f(x)-f(y)\big\| \leq \|x-y\|$. Y a-t-il plus simple ?

---

20. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence entre les trois assertions suivantes:

(**a**): u est lipschitzienne ; (**b**): u est continue sur E ; (**c**): u est continue en 0_E.

- -

Les implications (**a**) $\Longrightarrow$ (**b**) et (**b**) $\Longrightarrow$ (**c**) sont triviales. Il ne reste donc plus qu'à démontrer que (**c**) $\Longrightarrow$ (**a**).

Supposons donc u continue en le point 0_E. En choisissant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la continuité, on peut lui associer un $\alpha > 0$ tel que **(*):** $\forall x \in E \quad \|x\|_E \leq \alpha \Longrightarrow \big\|u(x)\big\|_F \leq 1$.

Soit alors $x \in E$ non nul. Le vecteur $y = \dfrac{\alpha}{\|x\|_E}\, x$ vérifie $\|y\|_E = \alpha$. De **(*)**, on déduit donc que $\big\|u(y)\big\|_F \leq 1$, ce qui entraîne (par la linéarité de u et l'homogénéité de la norme), $\dfrac{\alpha}{\|x\|_E}\,\big\|u(x)\big\|_F \leq 1$. On a donc $\big\|u(x)\big\|_F \leq \dfrac{1}{\alpha}\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ (l'inégalité étant triviale pour $x = 0_E$).

Enfin, u étant linéaire, si x et x' sont deux vecteurs de E, on a

$$\big\|u(x)-u(x')\big\|_F = \big\|u(x-x')\big\|_F \leq \frac{1}{\alpha}\,\|x-x'\|_E\ ,$$

l'application u est donc $\dfrac{1}{\alpha}$-lipschitzienne.

---

21. Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Soit $T_p = T + \mathrm{diag}\Big(\dfrac{1}{p}, \dfrac{2}{p}, \cdots, \dfrac{n}{p}\Big)$. Montrer que, pour p suffisamment grand, la matrice T_p a n valeurs propres distinctes. Montrer que toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables.

- -

Comme T_p est aussi triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont $a_1 + \dfrac{1}{p}$, $a_2 + \dfrac{2}{p}$, $\cdots$, $a_n + \dfrac{n}{p}$. Pour avoir $a_i + \dfrac{i}{p} = a_j + \dfrac{j}{p}$ avec $i \neq j$, il est nécessaire que l'on ait $a_i \neq a_j$ et $p\,|a_i - a_j| = |i-j| \leq n-1$, soit $p \leq \dfrac{n-1}{|a_i - a_j|}$. Les nombres $\dfrac{n-1}{|a_i - a_j|}$, où i et j sont deux indices de $[\![1,n]\!]$ tels que $a_i \neq a_j$, sont en nombre fini, il y a donc un plus grand d'entre eux, notons-le M. Pour $p > M$, la matrice T_p admet n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable: $A = PTP^{-1}$ avec P inversible et T triangulaire supérieure. On peut construire une suite de matrices diagonalisables (T_p) qui converge vers T. Alors, pour tout p, la matrice $A_p = PT_pP^{-1}$ est aussi diagonalisable et, par continuité du produit matriciel, on a $\lim_{p\to+\infty} A_p = \lim_{p\to+\infty} PT_pP^{-1} = PTP^{-1} = A$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. La même preuve est valable avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et, comme il est connu que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, on a ainsi prouvé que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

---

22. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $d_n : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $A \mapsto d_n(A) = \det A$, est continue.

b. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

c. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique. *On étudiera d'abord le cas particulier où A est inversible.*

- -

a. On peut raisonner par récurrence sur n. Pour $n = 1$, l'application $d_1 : \mathcal{M}_1(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ n'est autre que l'application identique de $\mathbb{K}$ (puisque, si $A = (a_{1,1}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{K})$, alors $d_1(A) = \det(A) = a_{1,1}$), elle est donc continue.

Soit $n \geq 2$, supposons l'application d_{n-1} continue sur $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$; alors la formule du développement d'un déterminant d'ordre n par rapport à la première colonne montre que $d_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\,\varphi_i \cdot d_{n-1} \circ f_i$, avec les notations suivantes : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

• φ_i est la forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui, à toute matrice A, associe son coefficient $a_{i,1}$ d'indices $(i, 1)$;

• f_i est l'application (évidemment linéaire) qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, associe la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ extraite de A en supprimant la i-ième ligne et la première colonne.

Comme φ_i et f_i sont linéaires en dimension finie, elles sont continues, donc d_n est continue comme somme, produit et composée d'applications continues.

b. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \big\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid d_n(A) \neq 0\big\} = d_n^{-1}(\mathbb{K}^*)$: le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque par l'application continue d_n de l'ouvert $\mathbb{K}^* = \mathbb{K} \setminus \{0\}$ de $\mathbb{K}$, c'est donc un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors la matrice $A - \lambda I_n$ est inversible pour tout scalaire λ n'appartenant pas à $\mathrm{Sp}(A)$. Comme le spectre de A est un ensemble fini, il existe une suite $(\lambda_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de scalaires n'appartenant pas à $\mathrm{Sp}(A)$ et convergeant vers 0. La suite de matrices $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, où l'on a posé $B_p = A - \lambda_p I_n$ est une suite de matrices inversibles convergeant vers A. L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est donc dense dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (*on peut approcher toute matrice par des matrices inversibles*).

c. Si A est inversible, alors les matrices AB et BA sont semblables puisque $BA = A^{-1}(AB)A$, elles ont donc le même polynôme caractéristique.

Sinon, considérons une suite (A_k) de matrices inversibles convergeant vers A. Par continuité du produit matriciel, on déduit $\lim_{k\to+\infty} A_kB = AB$ et $\lim_{k\to+\infty} BA_k = BA$. Puis, pour tout $z \in \mathbb{C}$ fixé, on a $\lim_{k\to+\infty} (zI_n - A_kB) = zI_n - AB$, et enfin par continuité du déterminant (c'est-à-dire de l'application d_n étudiée en **a.**), on déduit que

$$\chi_{A_kB}(z) = \det(zI_n - A_kB) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(zI_n - AB) = \chi_{AB}(z) \; .$$

De même, $\lim\limits_{k\to+\infty} \chi_{BA_k}(z) = \chi_{BA}(z)$.

Comme $\chi_{A_kB} = \chi_{BA_k}$ pour tout k puisque A_k est inversible, on a donc $\chi_{AB}(z) = \chi_{BA}(z)$, et ceci pour tout z, d'où l'égalité des polynômes χ_{AB} et χ_{BA}.

23*. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

a. Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathcal{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

b. Montrer qu'il existe deux points C et D de $\mathcal{C}$, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour de centre O, tels que $g(C) = g(D)$.

- -

a. La fonction $\begin{cases} f \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad t \mapsto g(R\cos t, R\sin t) \end{cases}$ est continue comme composée de fonctions continues, et elle est 2π-périodique. La fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = f(t+\pi) - f(t)$ est continue aussi, et on a $h(0) + h(\pi) = 0$. Les réels $h(0)$ et $h(\pi)$ étant de signes contraires (au sens large), il résulte du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel t_0 en lequel h s'annule. Or, la relation $h(t_0) = 0$ signifie précisément que g prend la même valeur en les deux points diamétralement opposés sue le cercle $\mathcal{C}$ qui sont $A \begin{pmatrix} R\,\cos(t_0) \\ R\,\sin(t_0) \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -R\,\cos(t_0) \\ -R\,\sin(t_0) \end{pmatrix}$.

b. Posons $k(t) = f\Big(t + \dfrac{\pi}{2}\Big) - f(t)$. Alors k est continue sur $\mathbb{R}$ et on observe que

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad k(t) + k\Big(t + \frac{\pi}{2}\Big) + k(t+\pi) + k\Big(t + \frac{3\pi}{2}\Big) = 0 \; .$$

Les quatre réels figurant dans la somme ci-dessus ne peuvent être tous strictement positifs, ni tous strictement négatifs. Il résulte encore du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe au moins un réel t_0 en lequel k s'annule, ce qui fournit le résultat escompté.

Dérivation des fonctions vectorielles de variable réelle

24. Soit E un espace euclidien, soit $f : [a,b] \to E$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, de dérivée bornée sur $]a,b[$: $\quad \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall t \in \,]a,b[\quad \|f'(t)\| \leq M$. En considérant l'application $\varphi : t \mapsto \big(f(b) - f(a) | f(t)\big)$, montrer l'inégalité

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a) \; .$$

- -

L'application φ proposée est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles. Pour $t \in]a,b[$, on a $\varphi'(t) = \big(f(b) - f(a) | f'(t)\big)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\forall t \in]a,b[\qquad \left|\varphi'(t)\right| = \Big|\big(f(b)-f(a)|f'(t)\big)\Big| \leq \left\|f(b)-f(a)\right\| \left\|f'(t)\right\| \leq M \left\|f(b)-f(a)\right\| .$$

L'inégalité des accroissements finis pour les fonctions à valeurs réelles donne alors

$$\left\|f(b)-f(a)\right\|^2 = \left|\varphi(b)-\varphi(a)\right| \leq M \left\|f(b)-f(a)\right\| (b-a) .$$

Si $\left\|f(b)-f(a)\right\| > 0$, on simplifie par cette quantité et on obtient l'inégalité demandée. Si $\left\|f(b)-f(a)\right\| = 0$, l'inégalité à démontrer est triviale.

---

25. Soit E un espace euclidien, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $\forall t \in I \quad f(t) \neq 0$. On pose $\varphi(t) = \|f(t)\|$ pour tout $t \in I$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et calculer φ' et φ''.

Réponse partielle. On obtient $\varphi'(t) = \dfrac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\|f(t)\|}$.

- -

Posons $q(t) = \left\|f(t)\right\|^2 = \big(f(t)|f(t)\big)$, alors q est de classe $\mathcal{C}^2$ et $q'(t) = 2\,\big(f(t)|f'(t)\big)$.

Comme $\varphi(t) = \sqrt{q(t)}$ avec $q(t) > 0$ pour tout t, alors φ est de classe $\mathcal{C}^2$ par composition et

$$\varphi'(t) = \frac{q't)}{2\sqrt{q(t)}} = \frac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\left\|f(t)\right\|} .$$

On dérive une deuxième fois, on obtient

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \frac{\Big(\left\|f'(t)\right\|^2 + \big(f(t)|f''(t)\big)\Big)\left\|f(t)\right\| - \big(f(t)|f'(t)\big)\,\dfrac{\big(f(t)|f'(t)\big)}{\left\|f(t)\right\|}}{\left\|f(t)\right\|^3} \\
&= \frac{\left\|f'(t)\right\|^2 \left\|f(t)\right\|^2 + \big(f(t)|f''(t)\big)\left\|f(t)\right\|^2 - \big(f(t)|f'(t)\big)^2}{\left\|f(t)\right\|^3} .
\end{aligned}$$