CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 5
PSI2 2023-2024

PARTIE A.

A.1. Le cardinal de $\mathcal{S}_n$ est $n!$

A.2. • On a $\mathcal{S}_1 = \{\mathrm{id}_{\{1\}}\}$, la seule permutation du singleton $\{1\}$ est l'identité, qui n'est évidemment pas un dérangement, donc $d_1 = 0$.

• Il y a deux permutations de l'ensemble $\{1, 2\}$: l'identité et la "transposition" τ qui échange les éléments 1 et 2. Seule cette dernière est un dérangement, donc $d_2 = 1$.

• Les six permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ sont:

- l'identité ;
- les trois transpositions, échangeant respectivement 1 et 2, 2 et 3, 1 et 3 ;
- les deux permutations circulaires $1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ et $1 \mapsto 3 \mapsto 2 \mapsto 1$.

Seules ces deux dernières sont des dérangements, donc $d_3 = 2$.

A.3. Construire une telle permutation σ revient à choisir un dérangement du complémentaire $[\![1, n]\!] \setminus A$, qui est de cardinal $n - k$. Le nombre de possibilités est donc d_{n-k}.

A.4. Il y a $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ façons de choisir l'ensemble A des points fixes de la permutation σ (qui doit être une partie à k éléments de l'ensemble $[\![1, n]\!]$) puis, cet ensemble A étant choisi, il y a d_{n-k} façons de choisir un dérangement du complémentaire $[\![1, n]\!] \setminus A$. Le nombre de permutations de $[\![1, n]\!]$ ayant k points fixes est donc $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k}$.

A.5. En sommant ce que l'on vient d'obtenir en **A.4.** pour k allant de 0 à n, on obtient le nombre total de permutations de $[\![1, n]\!]$, donc

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ n-k \end{pmatrix} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_k$$

en observant d'abord la symétrie des coefficients binomiaux, puis en faisant le changement d'indice $k \leftarrow n - k$.

A.6. On a évidemment $0 \leq d_n \leq n!$, donc $0 \leq \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$. Le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{d_n}{n!} x^n$ est donc au moins égal à celui de la série géométrique $\sum x^n$, soit $R \geq 1$.

A.7. Les fonctions s et exp sont toutes deux développables en série entière sur $]-1; 1[$, donc leur produit h aussi, et on obtient le DSE de h sur $]-1, 1[$ par produit de Cauchy des DSE de s et de l'exponentielle: pour $x \in]-1, 1[$, en utilisant la relation obtenue en **A.5.**,

$$\begin{aligned} h(x) \;=\; s(x)\, e^x \;&=\; \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{d_p}{p!}\, x^p \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^q}{q!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p+q=n} \frac{d_p}{p!\, q!} \right) x^n \\ &=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!\,(n-k)!} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} d_k \right) \frac{x^n}{n!} \\ &=\; \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \,. \end{aligned}$$

A.8. Pour $x \in]-1, 1[$, on a $h(x) = s(x)\, e^x = \dfrac{1}{1-x}$, donc $s(x) = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. On constate que $\lim\limits_{x \to 1^-} s(x) = +\infty$, donc $R = 1$. *En effet, on sait déjà que $R \geq 1$, et si on avait $R > 1$, alors la fonction somme s serait continue sur $]-R, R[$, et en particulier au point 1, ce qui est incompatible avec une limite à gauche infinie en ce point.*

Autre explication possible pour le rayon de convergence: en posant $a_n = \dfrac{d_n}{n!}$, $b_n = \dfrac{1}{n!}$ et $c_n = 1$, on a vu en **A.7.** que la série entière $\sum c_n x^x$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$. Le cours indique alors que $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$. Comme $R_b = +\infty$ et $R_c = 1$, on déduit que $R_a \leq 1$. Donc $R = R_a = 1$.

PARTIE B.

B.1. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur D_f, on peut donc, à tout ordre n, appliquer la formule de Leibniz pour dériver n fois la relation $(1-x)\,f(x) = e^{-x}$. Cela donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x) \cdot f^{(n-k)}(x) = (-1)^n\, e^{-x}\ .$$

Or, pour $k \geq 2$, on a $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}(1-x) = 0$, il reste donc seulement les termes pour $k = 0$ et $k = 1$, soit

$$(1-x)\, f^{(n)}(x) - n\, f^{(n-1)}(x) = (-1)^n\, e^{-x}\ .$$

B.2. En évaluant pour $x = 0$, cela donne $f^{(n)}(0) - n\, f^{(n-1)}(0) = (-1)^n$. Or, la fonction f coïncide avec la fonction s sur $]-1,1[$ d'après **A.8.**, donc la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est la série de Taylor de f, i.e. pour tout n entier naturel, $d_n = f^{(n)}(0)$. On a donc la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad d_n - n\, d_{n-1} = (-1)^n\ .$$

B.3. En divisant cette relation par $n!$, pour $n \geq 1$, on obtient $\dfrac{d_n}{n!} - \dfrac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. En sommant les relations $\dfrac{d_k}{k!} - \dfrac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \dfrac{(-1)^k}{k!}$ pour k de 1 à n, on obtient, par télescopage,

$$\frac{d_n}{n!} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\ , \quad \text{soit encore} \quad d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\ .$$

B.4. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$, on obtient $\displaystyle d_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n!}{e}$.

B.5. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{d_n}{n!} = \frac{1}{e} \neq 0$, donc les séries $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!}\,(-1)^n$ sont grossièrement divergentes.

PARTIE C.

C.1. Il est clair que les valeurs prises par la variable X sont les entiers de 0 à n. On peut modéliser cette expérience aléatoire en attribuant à chaque invité un numéro de 1 à n, et en attribuant aussi le numéro i au chapeau de l'invité numéro i, pour tout i de 1 à n. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, notons $\sigma(i)$ le numéro du chapeau que récupérera l'invité numéro i à la fin de la soirée, alors σ est bien sûr une permutation de l'ensemble $[\![1,n]\!]$, i.e. $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On peut donc considérer que l'univers est $\Omega = \mathcal{S}_n$. Il reste à se persuader que cet univers est muni de la probabilité uniforme, les $n!$ permutations possibles des chapeaux étant équiprobables. Dans ce contexte, le calcul de la loi de X se ramène à un problème de dénombrement: pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}} = \frac{\mathrm{Card}\left(\mathcal{S}_n^{(k)}\right)}{\mathrm{Card}(\mathcal{S}_n)} = \binom{n}{k} \frac{d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k!(n-k)!}$$

en notant $\mathcal{S}_n^{(k)}$ l'ensemble des permutations de $\mathcal{S}_n$ ayant exactement k points fixes, et en utilisant la question **A.4.** En utilisant enfin **B.3.**, on obtient

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} \frac{d_{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!} \ .$$

En particulier, la probabilité qu'aucun invité ne reparte avec son propre chapeau vaut $P(X = 0) = \dfrac{d_n}{n!}$*, et cette probabilité tend vers* e^{-1} *lorsque* n *tend vers l'infini.*

C.2. Clairement, $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

Chaque variable X_i suit une loi de Bernoulli (puisqu'elle prend pour valeurs 0 et 1), dont le paramètre est $P(A_i) = \dfrac{1}{n}$. En effet, l'événement $A_i = \{X_i = 1\}$ est constitué des permutations $\sigma \in \mathcal{S}_n$ telles que $\sigma(i) = i$, il y en a autant que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i\}$, à savoir $(n-1)!$, donc $P(A_i) = \dfrac{\mathrm{Card}(A_i)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{(n-1)!}{n!} = \dfrac{1}{n}$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}\Big(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) = n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Il y a donc, en moyenne, un seul invité qui repart avec son propre chapeau (*et ceci pour tout* n)!

C.3. Les valeurs possibles de la variable $X_i X_j$ sont encore 0 et 1, c'est donc aussi une variable de Bernoulli. Son paramètre est $P(X_i X_j = 1)$. Or,

$$\{X_i X_j = 1\} = \{X_i = 1\} \cap \{X_j = 1\} = A_i \cap A_j = \big\{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma(i) = i \text{ et } \sigma(j) = j\big\} \ .$$

Avec $i \neq j$, il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ qui fixent i et j que de permutations de $[\![1, n]\!] \setminus \{i, j\}$, soit $(n-2)!$. Donc $\mathrm{E}(X_i X_j) = P(X_i X_j = 1) = \dfrac{(n-2)!}{n!} = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

C.4. Appliquons la formule de Koenig-Huygens: $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Notons que

$$X^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 + \sum_{i \neq j} X_i X_j = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i \neq j} X_i X_j \ .$$

On a en effet $X_i^2 = X_i$ puisque X_i est à valeurs dans $\{0, 1\}$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathrm{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{E}(X_i X_j) = n \cdot \frac{1}{n} + n(n-1) \cdot \frac{1}{n(n-1)} = 2 \ .$$

Enfin, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 2 - 1 = 1$.

PARTIE D.

D.1. On a $\left|e^{-1}n! - d_n\right| = n! \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right|$. Or, la suite $\left(\frac{1}{k!}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 en décroissant, donc le théorème spécial des séries alternées permet de majorer ce reste en valeur absolue par le premier terme négligé, i.e.

$$\left|e^{-1}n! - d_n\right| = n! \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \right| \leq n! \, \frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \; .$$

Pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{2}$, donc le nombre d_n (qui est bien un entier naturel par définition) est l'entier le plus proche du réel $e^{-1}n!$

D.2. Posons $a_n = \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = e^{-1}$, mais on a $a_n \neq e^{-1}$ pour tout n: en effet, comme $a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+1)!} < 0$, la suite extraite (a_{2n}) est strictement décroissante, et la suite extraite (a_{2n+1}) est strictement croissante puisque $a_{2n+3} - a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} > 0$. Donc aucun terme a_{2n} ou a_{2n+1} ne peut être égal à la limite. Si le nombre e était rationnel, i.e. si $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$, alors $e^{-1}p! = \frac{q}{p}\, p! = q\,(p-1)!$ serait un entier, donc d_p, qui est l'entier le plus proche de $e^{-1}p!$ serait égal à $e^{-1}p!$, mais cette égalité entraîne $a_p = e^{-1}$, ce qui est faux. Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

D.3. On a $\delta_n = n! \left(e^{-1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right)$. Introduisons la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$, on a alors $f^{(k)}(x) = (-1)^k e^{-x}$ pour tout k entier naturel, en particulier $f^{(k)}(0) = (-1)^k$. Donc

$$\delta_n = n! \left(f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, (1-0)^k \right) .$$

On applique alors la formule de Taylor avec reste intégral à f entre 0 et 1 à l'ordre n:

$$\delta_n = n! \int_0^1 \frac{(1-t)^n\, f^{(n+1)}(t)}{n!}\, \mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)^n \, (-1)^{n+1}\, e^{-t}\, \mathrm{d}t = (-1)^{n+1} e^{-1} \int_0^1 u^n e^u \, \mathrm{d}u$$

en posant $t = 1 - u$ dans l'intégrale.

D.4. Pour tout $u \in [0,1]$, on a $u^{n+1}e^u \leq u^n e^u$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on a

$$|\delta_{n+1}| = e^{-1} \int_0^1 u^{n+1} e^u \, \mathrm{d}u \leq e^{-1} \int_0^1 u^n e^u \, \mathrm{d}u = |\delta_n| \; ,$$

la suite $\big(|\delta_n|\big)$ est donc décroissante. Par ailleurs cette suite tend vers zéro puisque

$$0 \leq |\delta_n| = e^{-1} \int_0^1 u^n e^u \, \mathrm{d}u \leq e^{-1}\, e^1 \int_0^1 u^n \, \mathrm{d}u = \frac{1}{n+1} \; .$$

La série $\sum \delta_n$ est une série alternée puisque δ_n est du signe de $(-1)^{n+1}$, et la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0, cette série est donc convergente.

D.5. On a

$$\begin{aligned} |\delta_n| &= e^{-1} \int_0^1 u^n e^u \, \mathrm{d}u \\ &= e^{-1} \left(\left[\frac{u^{n+1}}{n+1} e^u \right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 u^{n+1} e^u \, \mathrm{d}u \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - e^{-1} \int_0^1 u^{n+1} e^u \, \mathrm{d}u \right) \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 - |\delta_{n+1}| \right) . \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} |\delta_{n+1}| = \lim\limits_{n\to+\infty} |\delta_n| = 0$, on conclut que $|\delta_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, ou $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

PARTIE E.

E.1. Parmi les involutions σ de $[\![1, n]\!]$, il y a celles qui fixent n, c'est-à-dire qui vérifient $\sigma(n) = n$, ... et les autres!

Il y a autant d'involutions de $[\![1, n]\!]$ qui fixent n que d'involutions de $[\![1, n]\!] \setminus \{n\} = [\![1, n-1]\!]$ (σ doit induire une permutation de $[\![1, n-1]\!]$ qui doit aussi être une involution), il y en a donc I_{n-1}.

Pour en construire une, σ, qui ne fixe pas n, on choisit l'image $k = \sigma(n)$ de n dans $[\![1, n-1]\!]$, il y a donc $n-1$ choix possibles ; on a alors nécessairement $\sigma(k) = n$ et σ doit induire une permutation elle aussi involutive sur l'ensemble $[\![1, n]\!] \setminus \{k, n\}$ de cardinal $n-2$. Il y a alors I_{n-2} choix possibles pour cette permutation induite. Au final, il y a $(n-1)I_{n-2}$ involutions de $[\![1, n]\!]$ qui ne fixent pas n.

Bilan: $I_n = I_{n-1} + (n-1)\, I_{n-2}$.

E.2. Si on note $\mathcal{I}_n$ l'ensemble des involutions de $[\![1, n]\!]$, on a $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{S}_n$, donc

$$I_n = \mathrm{Card}(\mathcal{I}_n) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{S}_n) = n!$$

Comme $0 \leq \dfrac{I_n}{n!} \leq 1$, par comparaison à la série géométrique $\sum x^n$, on déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{I_n}{n!} x^n$ est au moins égal à 1.

E.3. Pour $x \in]-1, 1[$, on a

$$\begin{aligned} u'(x) - (1+x)\, u(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{x^{n+1}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} I_{n+1} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} I_n \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} I_{n-1} \frac{x^n}{(n-1)!} \\ &= (I_1 - I_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_{n+1} - I_n - nI_{n-1}}{n!}\, x^n \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $I_0 = I_1 = 1$ et que $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ d'après **E.1.**

E.4. La fonction somme u est donc solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle $y' = (1+x)y$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions $y = C\, e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

Enfin, $C = u(0) = 1$ donc $\forall x \in]-1,1[\quad u(x) = e^{x+\frac{x^2}{2}}$.

E.5. Pour $x \in]-1,1[$, on a donc

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n = e^x\, e^{\frac{x^2}{2}} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2q}}{2^q\, q!}\right).$$

Pour développer en produit de Cauchy, écrivons plutôt $u(x) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^p}{p!}\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q x^q\right)$, où l'on a posé $b_{2k} = \dfrac{1}{2^k\, k!}$ et $b_{2k+1} = 0$. Alors,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n\ , \quad \text{avec} \quad c_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{b_j}{(n-j)!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k\, k!\, (n-2k)!} \quad \text{et} \quad N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Par unicité du développement en série entière, il est légitime d'identifier les coefficients:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \frac{I_n}{n!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^k\, k!\, (n-2k)!} \quad \text{avec} \quad N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Remarque. Le calcul ci-dessus montre que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ est formellement le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{p\geq 0} \frac{x^p}{p!}$ et $\sum_{q\geq 0} \frac{x^{2q}}{2^q\, q!}$, qui sont toutes deux de rayon de convergence infini (séries exponentielles). Le cours indique que la série entière $\sum_{n\geq 0} \frac{I_n}{n!} x^n$ a alors aussi un rayon de convergence infini. On a finalement

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n = e^{x+\frac{x^2}{2}}.$$