Espaces probabilisés.

1. Déterminer une distribution de probabilités $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ sur l'ensemble $\Omega = [\![1, n]\!]$, telle que la probabilité de l'événement $[\![1, k]\!]$ soit proportionnelle à k^2.

2. En Palombie, lorsqu'il fait soleil un jour, il fait soleil le lendemain une fois sur 10 et, lorsqu'il pleut un jour, il pleut le lendemain 6 fois sur 10.

a. Il a fait soleil un lundi. Quelle est la probabilité qu'il fasse soleil le jeudi qui suit ?

b. Sachant qu'il a fait soleil le jour J, on note p_n la probabilité qu'il fasse soleil le jour $J + n$. Calculer p_n et $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. On pourra considérer pour tout n l'événement $E_n =$ "il fait soleil le jour $J + n$" et travailler sur le vecteur-colonne $X_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(\overline{E_n}) \end{pmatrix}$.

3. Une succession d'individus $A_1, \cdots, A_n$ se transmet une information binaire du type "oui" ou "non". Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçue avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son contraire avec la probabilité $q = 1 - p$. Chaque individu se comporte indépendamment des autres. Calculer la probabilité π_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1. Quelle est la limite de π_n quand n tend vers l'infini ?

4. Soient $A_1, \cdots, A_n$ des événements mutuellement indépendants. Montrer que la probabilité pour qu'aucun d'eux ne soit réalisée est majorée par $M = \exp\Big(-\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_k)\Big)$.

5. Soient m, N, k des entiers naturels au moins égaux à 2, avec $k \leq N$. Une urne contient mN boules dont N sont blanches. On tire k boules dans cette urne, et on s'intéresse à la probabilité de tirer j boules blanches ($0 \leq j \leq k$). On pourra poser $p = \dfrac{1}{m}$, le nombre $p \in [0, 1]$ est donc la proportion initiale de boules blanches.

a. Quelle est cette probabilité si le tirage est avec remise ? On constate qu'elle ne dépend pas de N, mais qu'elle ne dépend que de la proportion p de boules blanches dans l'urne.

b. Quelle est cette probabilité si le tirage est sans remise ? Elle dépend alors de N.

c. Si N devient très grand devant le nombre k de boules tirées, on a l'intuition que le fait que le tirage s'effectue avec ou sans remise ne va pas changer grand-chose. Le vérifier mathématiquement.

6*. On s'intéresse à la survie d'une espèce pour laquelle un individu admet trois descendants avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$, un ou deux descendants avec la probabilité $\dfrac{3}{8}$, et enfin aucun descendant avec la probabilité $\dfrac{1}{8}$. On suppose qu'à l'instant initial, la population est composée d'un seul individu. Par conséquent, l'espèce s'éteindra au bout de la première génération avec une probabilité de $x_1 = \dfrac{1}{8}$.

a. Quelle est la probabilité x_2 pour que l'espèce ait disparu à l'issue de la deuxième génération ?

b. Pour tout n entier naturel non nul, on note x_n la probabilité que l'espèce ait disparu à l'issue de la n-ème génération. Montrer que la suite (x_n) vérifie la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_{n+1} = \frac{1}{8}\left(x_n^3 + 3x_n^2 + 3x_n + 1\right).$$

c. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

7. Un groupe de n chasseurs tire simultanément et indépendamment sur n canards. Chaque chasseur ne tire qu'une seule fois et atteint toujours sa cible.

a. Quelle est la probabilité p_n qu'au moins un canard survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

b. L'un des canards s'appelle Saturnin. Quelle est la probablité q_n qu'il survive ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Variables aléatoires.

8. Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent des lois binomiales de tailles n et m et de même paramètre p. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z = X + Y$?

9. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules dans celle-ci et on note X le nombre de boules rouges obtenues lors de ce tirage. Quelle est la loi de X, son espérance, sa variance ?

10. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules sans remise ($1 \leq n \leq N$). On note X et Y le plus petit numéro et le plus grand numéro obtenus.

a. Pour $k \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(X \geq k)$. En déduire la loi de X.

b. Pour $l \in [\![1, N]\!]$, déterminer $P(Y \leq l)$. En déduire la loi de Y.

c. Quelle est la loi conjointe du couple $U = (X, Y)$?

11. On considère une suite de tirages avec remise dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N. Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du n-ème tirage.

a. Que dire de la variable aléatoire X_1 ?

b. Pour $n \geq 1$, quel est l'ensemble $X_n(\Omega)$?

c. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer la relation, pour $n \geq 2$ et $k \in [\![0, N-1]\!]$,

$$P(X_n = k) = \frac{N-k}{N}\, P(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N}\, P(X_{n-1} = k+1)\ .$$

d. En déduire que la suite $\big(\mathrm{E}(X_n)\big)_{n\geq 1}$ est géométrique, et donner l'expression de $\mathrm{E}(X_n)$.

12. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$. On suppose que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2 \qquad P\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}\ .$$

a. Déterminer la loi de X. Reconnaître la loi de $X - 1$, en déduire $\mathrm{E}(X)$.

b. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$, avec $m_{i,j} = P\big(\{X = i\} \cap \{Y = j\}\big)$. Calculer M^2, en déduire le spectre de M.

Indication. On pourra utiliser (et éventuellement prouver) la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.