DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 5
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

Un problème regroupant des choses classiques: des séries entières associées à des questions de dénombrement.

La rédaction des questions de dénombrement est parfois inquiétante, elle montre chez certains des difficultés d'expression en langue française écrite, chez d'autres des raisonnements confus (confusions entre le nombre d'éléments d'une partie et le nombre de permutations, ou de dérangements, de cette partie). Lorsqu'un travail demande un peu de rédaction (c'est tout particulièrement le cas en mathématiques lorsqu'il y a du dénombrement ou des probabilités), je vous conseille vivement de vous relire attentivement, et de vous assurer que ce que vous avez écrit a bien un sens.

A.2 Certaines copies se contentent d'afficher les résultats: $d_1 = 0$, $d_2 = 1$, $d_3 = 2$. Il me semble que cette question exigeait que les dérangements pour n valant 1, 2 ou 3, soient explicités, ce qui est très bien fait dans la plupart des copies.

A.3 et A.4. Lisez bien l'énoncé. Certains d'entre vous répondent de façon "décalée", ne comprenant pas toujours ce qui est fixé et ce qu'il faut dénombrer dans chacune des questions.

A.6. La règle de d'Alembert (que vous semblez adorer!) est ici inappropriée, on ne connaît pas grand-chose pour le moment sur le comportement de $\dfrac{d_{n+1}}{d_n}$... alors qu'il est immédiat que $0 \leq \dfrac{d_n}{n!} \leq 1$ (puisque les dérangements sont des permutations particulières), ce qui donne immédiatement $R \geq 1$ par comparaison. Au passage, n'oubliez pas que les comparaisons de rayons de convergence reposent sur des comparaisons de séries à termes positifs, il est donc nécessaire de précéder la majoration $d_n \leq n!$ de l'inégalité $0 \leq$, ou alors de mettre une valeur absolue.

A.8. L'affirmation $R = 1$ est souvent donnée sans justification. Il me semble qu'il y a d'ailleurs parfois des confusions sur ce que l'énoncé appelle R.

B.1. Évitez de parachuter une formule improbable et de dire "je vais démontrer ça par récurrence", ce n'est pas joli. Il me semble que l'énoncé dirigeait vers l'utilisation de la formule de Leibniz.

B.2. Quelques calculs très maladroits, il suffisait de voir que $d_n = f^{(n)}(0) = s^{(n)}(0)$ puisque la définition même de la fonction s montre que $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est la série de Taylor de s, donc de f.

On pouvait aussi obtenir la relation demandée assez rapidement en développant la relation $(1 - x)\, s(x) = e^{-x}$ et en utilisant l'unicité du DSE.

B.3 Peut s'obtenir par récurrence et télescopage à partir de **B.2.**, mézôssi par produit de Cauchy en remarquant que $s(x) = e^{-x} \times \dfrac{1}{1-x}$.

B.5. Un certain nombre de confusions et de choses peu rigoureuses dans cette question. Il n'est pas question ici d'appliquer un théorème d'interversion somme-limite en un point où, clairement, les hypothèses ne sont pas satisfaites! On ne demande pas ici de montrer que $\lim\limits_{x\to 1} s(x) = +\infty$ (même si le résultat est vrai, et a bien sûr un lien avec la question posée), on demande seulement de savoir si $s(1)$ et $s(-1)$ sont définis, autrement dit si les séries $\sum \dfrac{d_n}{n!}$ et $\sum \dfrac{(-1)^n d_n}{n!}$ convergent. Or, il est clair qu'elles sont toutes deux grossièrement divergentes.

C.2. et C.3. Quelques confusions entre loi binomiale et loi de Bernoulli (qui en est un cas particulier). J'ai vu dans certaines copies une loi de Bernoulli avec deux paramètres (???). Il va falloir relire d'urgence le cours de proba de 1ère année.

C.4. Dans plusieurs copies, je lis des calculs aberrants, avec notamment des égalités entre une variable aléatoire et une espérance. Bouh c'est pas beau!

D.1. Bien lire l'énoncé, on ne demande pas de démontrer que le nombre d_n est la partie entière du réel $e^{-1}n!$, ce qui n'est pas toujours vrai! Il faut montrer que $|\delta_n| < \frac{1}{2}$, ce que l'on peut obtenir par majoration de la valeur absolue du reste d'une série alternée, ou bien par l'inégalité de Taylor-Lagrange, ce qui est en fait la question **D.3.**

D.2. La conclusion n'est pas toujours claire. Vous procédez souvent par un raisonnement par l'absurde, il faut donc faire apparaître une contradiction, mais dans certaines copies je ne vois pas très bien ce qu'il y a de contradictoire! Exemple type: "si on avait $e = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers, alors $e^{-1}p!$ serait entier, ce qui est absurde". Euh... et pourquoi ce serait absurde ???

E.2. Encore un exemple où la règle de d'Alembert est inadaptée... alors qu'il est immédiat que $0 \leq I_n \leq n!$ puisque les involutions sont des permutations particulières, ce qui donne le résultat immédiatement par comparaison.

E.5. Cette relation s'obtient en développant un produit de Cauchy de deux séries entières, mais il faut le faire avec soin car l'une des deux séries entières ne comporte que des termes de degré pair ce qui oblige à manipuler précautionneusement les indices, *cf.* corrigé. Un certain nombre de démonstrations sont fausses, affirmant que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} x^n$ par exemple, ce qui est erroné.

On peut aussi obtenir la formule demandée par un raisonnement de dénombrement. En effet, il est facile de voir (surtout si l'on a fait une MPSI) que les involutions de $[\![1, n]\!]$ sont exactement les permutations que l'on peut décomposer en un produit de transpositions à supports disjoints. Pour en construire une, il faut donc choisir k paires disjointes d'éléments de $[\![1, n]\!]$, avec $0 \leq k \leq N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et compter combien il y a de façons de faire un tel choix. Pour plus de détails, demandez à Téo, il se fera un plaisir de vous expliquer!