PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour tout réel t strictement positif, on note D_t la matrice diagonale

$$D_t = \mathrm{diag}(t, t^2, t^3, \cdots, t^n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ .$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n, on note $\mathcal{S}_A$ la **classe de similtude** de A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont semblables à la matrice A:

$$\mathcal{S}_A = \left\{ PAP^{-1} \ ; \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \right\} .$$

On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme λI_n, avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, de la norme notée $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\forall X = (x_1, \cdots, x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \qquad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ .$$

On notera S_n la sphère unité de $\mathbb{C}^n$ pour cette norme, i.e.

$$S_n = \left\{ X \in \mathbb{C}^n \ \middle| \ \|X\|_1 = 1 \right\} .$$

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes, on pose

$$N(A) = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) .$$

On définira aussi le **rayon spectral** $\rho(A)$ de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par la relation

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda| \ .$$

PARTIE A. Étude d'une norme matricielle.

1. Vérifier que N est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2.a. Pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, prouver la relation $\|AX\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$.

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice pour lequel $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_{i,s}| = N(A)$. Calculer $\|AE_s\|_1$, où E_s est le s-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

c. En déduire que $N(A) = \displaystyle\max_{X \in S_n} \|AX\|_1$, et aussi que $N(A) = \displaystyle\max_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

3. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$.

PARTIE B. Des calculs préliminaires.

4. On considère une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout réel strictement positif t, on considère la matrice $B(t) = D_t \, A \, D_t^{-1}$. Expliciter les coefficients $b_{i,j}(t)$ de la matrice $B(t)$ en fonction de t et des $a_{i,j}$. *On rappelle que la multiplication à droite ou à gauche par une matrice diagonale peut être interprétée en termes d'opérations élémentaires.*

5. On considère dans cette question une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} .$$

On suppose que $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| < 1$.

a. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} D_t A D_t^{-1}$.

b. Montrer qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $N(D_{t_0} A D_{t_0}^{-1}) < 1$.

c. En utilisant la question **3.**, montrer que $\lim_{k\to+\infty} N(D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1}) = 0$.

d. En déduire que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice nulle 0_n.

PARTIE C. Propriétés du rayon spectral.

6. Déterminer le rayon spectral des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

7. Dire, en justifiant brièvement la réponse, si les assertions suivantes sont exactes quels que soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $\mu \in \mathbb{C}$.

(a): $\rho(\mu A) = |\mu|\, \rho(A)$.

(b): $\rho(A + B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

(c): $\rho(AB) \leq \rho(A)\, \rho(B)$.

(d): $\forall P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

(e): $\rho(A^\top) = \rho(A)$.

8. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $N(A^k) \geq \rho(A)^k$.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0_n \iff \rho(A) < 1$.

11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit α un réel strictement positif. Montrer l'équivalence

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0_n \iff \alpha > \rho(A) .$$

12. Prouver la relation

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \lim_{k\to+\infty} \left(N(A^k)\right)^{1/k} = \rho(A) .$$

13. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $b_{i,j} = |a_{i,j}|$. Prouver l'inégalité

$$\rho(A) \leq \rho(B) .$$

PARTIE D. Caractérisation des matrices nilpotentes.

14. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente, i.e. il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$. Montrer que la classe de similitude $\mathcal{S}_A$ contient une matrice R triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls. En utilisant la question **4.**, montrer que $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$, i.e. la matrice nulle est adhérente à la partie $\mathcal{S}_A$.

15. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que l'application $\varphi_z : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to \quad \mathbb{C} \\ M & \mapsto \quad \chi_M(z) \end{cases}$ est continue.

16. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice telle que $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$, il existe donc une suite (A_k) de matrices de $\mathcal{S}_A$ convergeant vers la matrice nulle. En déduire que $\chi_A = X^n$, et conclure.