**Convergence dominée et intégration terme à terme.**

**1.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$.

**a.** Montrer que chaque fonction $f_n$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**b.** Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**c.** Montrer que la suite $(f_n)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction intégrable $f$.

**d.** Quelle remarque peut-on faire ?

**2.** Soit l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Donner un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,\mathrm{d}x$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$, faisant intervenir l'intégrale $J$.

**3.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

**4.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(1) \neq 0$. Trouver un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\, f(t)\,\mathrm{d}t$.

*On pourra utiliser le changement de variable $u = t^{n+1}$.*

**5.** Pour $n$ entier naturel, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

**a.** Montrer que la suite $(I_n)$ tend vers zéro en décroissant.

**b.** Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n$ et calculer sa somme.

**6.** Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites réelles bornées. Soient $c$ et $d$ deux réels tels que $c < d$. On suppose que

$$\forall x \in [c,d] \qquad \lim_{n\to+\infty} \Big(a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx)\Big) = 0\ .$$

**a.** Montrer que, pour tout entier $n$, il existe un réel $\varphi_n$ tel que

$$a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx) = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\, \cos(nx + \varphi_n)\ .$$

**b.** Calculer $I_n = \displaystyle\int_c^d \big(a_n\, \cos(nx) + b_n\, \sin(nx)\big)^2\,\mathrm{d}x$.

**c.** Montrer que, à partir d'un certain rang, on a $I_n \geq \dfrac{(a_n^2 + b_n^2)(d-c)}{4}$.

**d.** Montrer que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ tendent vers 0.

**7.** On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calculer $J(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, \cos(xt)\,\mathrm{d}t$ pour $x$ réel.

**8.** On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+e^{-t})\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-t})\,\mathrm{d}t$.

**9.a.** Sachant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, calculer $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\,e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ pour $n$ entier naturel non nul.

**b.** Prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

**10*.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continue. Comparer les natures de l'intégrale généralisée $\displaystyle J = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ et de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_0^1 t^n\,f(t)\,\mathrm{d}t$.

**11.** Prouver les égalités $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ et $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

**12.** Pour $a > 0$, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+a}$.

---

**Intégrales dépendant d'un paramètre.**

**13.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\displaystyle f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$.

**a.** Montrer que $f$ est définie et monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.

**b.** Trouver une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$, et aussi lorsque $x \to 0^+$.

**14.** Pour $x \geq 0$, calculer $\displaystyle g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Arctan}(x \cdot \tan t)}{\tan t}\,\mathrm{d}t$.

**15.** Soit $\displaystyle g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et expliciter $g'(x)$.

**b.** Calculer directement $g(1)$ ; en déduire la valeur de $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}\,\mathrm{d}t$.

**16.a.** Soit la fonction $\displaystyle g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que $g$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et écrire une équation différentielle du premier ordre vérifiée par $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

**b.** En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\displaystyle G = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

**17.** Pour $x > -1$, on pose $\displaystyle g(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,t^x\,\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $g$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$.

**b.** Calculer $g'(x)$. En déduire $g(x)$.

**18.** On pose $g(x) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\ \sin t)\,\mathrm{d}t$.

**a.** Montrer que $g$ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont $g$ est solution.

**c.** Montrer que $g$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

**d.** À l'aide de l'équation différentielle obtenue en **b.**, obtenir ce développement.

**19.** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Montrer que $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big(f(t)\big)^x\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} \big(\varphi(x)\big)^{\frac{1}{x}}$.

**20.** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^x\,\mathrm{d}t$.

**a.** Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

**b.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et déterminer ses variations.

**c.** Pour $x \in D_f$, on pose $g(x) = (x+1)\,f(x)\,f(x+1)$. Montrer que $\forall x \in D_f \quad g(x+1) = g(x)$.

**d*.** Montrer que $g$ est constante sur $D_f$.

**21.** On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

**a.** Ensemble de définition de $f$.

**b.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $D_f$.

**c.** Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

**d.** Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $0^+$.

**22.** Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I \quad u(x) < v(x)$. Soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.

Montrer que l'application $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur $I$. *On pourra poser $t = u(x) + s\,\big(v(x) - u(x)\big)$, où $s$ désigne une nouvelle variable.*

---

**Transformées de Laplace et de Fourier. Intégrales eulériennes**

*Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, on note $Tf$ ou encore $\widehat{f}$ la fonction définie par*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad Tf(x) = \widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-ixt}\,\mathrm{d}t\,.$$

*La fonction $\widehat{f} = Tf$ est la* **transformée de Fourier** *de $f$. L'application $T : f \mapsto Tf$ est la* **transformation de Fourier**.

**23.** On admet $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Montrer que l'application $f : \alpha \mapsto f(\alpha) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-i\alpha x}\mathrm{d}x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Trouver une équation différentielle vérifiée par $f$, en déduire son expression.

**24.a.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et que c'est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

**b.** Soit la fonction "créneau" $\varphi$ définie par $\varphi(t) = 1$ si $t \in [-1, 1]$ et $\varphi(t) = 0$ sinon. Calculer sa transformée de Fourier $x \mapsto \widehat{\varphi}(x)$.

**c.** Soit $a$ un réel strictement positif, soit la fonction $f$ définie par $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = e^{-a|t|}$. Montrer que $f$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa transformée de Fourier $\widehat{f}$.

**d.** On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et intégrable sur $\mathbb{R}$, et que sa dérivée $f'$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$, puis prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R} \quad \widehat{f'}(x) = ix\,\widehat{f}(x)$

*Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ est une fonction continue par morceaux, la* **transformée de Laplace** *de $f$ est la fonction $\mathcal{L}[f]$ définie par*

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

*pour tout réel $p$ tel que cette intégrale est convergente.*

**25.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un réel $p_0$ tel que la fonction $t \mapsto e^{-p_0 t}\, f(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

**a.** Montrer que la transformée de Laplace $\mathcal{L}[f]$ est définie et continue sur l'intervalle $[p_0, +\infty[$.

**b.** Montrer que la fonction $\mathcal{L}[f]$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert $]p_0, +\infty[$ et que, sur cet intervalle, on a, pour tout $n$ entier naturel, la relation $\left(\mathcal{L}[f]\right)^{(n)} = (-1)^n\, \mathcal{L}[g_n]$, où $g_n$ est la fonction définie par $g_n(t) = t^n\, f(t)$.

**26. Théorème de la valeur finale**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$, continue par morceaux, admettant une limite finie en $+\infty$ : $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = l$.

Montrer que la transformée $\mathcal{L}[f]$ est définie (au moins) sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\lim_{p\to0^+} p \cdot \mathcal{L}[f](p) = l = \lim_{t\to+\infty} f(t)\ .$$

*On pourra poser $x = pt$.*

---

**Exercices avec Python**

**27.** Soit $g : ]0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^x$.

**a.** Prolonger $g$ par continuité en 0.

**b.** Représenter graphiquement $g$. Justifier l'allure de $g$ au voisinage de 0. Déterminer les coordonnées du minimum.

**c.** Donner une valeur approchée de $I = \displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$.

**d.** On admettra que $\displaystyle\int_0^1 (x\, \ln x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout $n$ entier naturel. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

**e.** Écrire une fonction `calcul(e)` retournant la valeur de l'intégrale $I$ avec une précision `e` passée en argument.