CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 6
PSI2 2023-2024

d'après X-ENS-ESPCI 2017, filière PC

PARTIE A. Étude d'une norme matricielle.

1. On a bien $N(A) \in \mathbb{R}_+$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

- $\displaystyle\max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) = 0 \iff \forall j \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| = 0 \iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad |a_{i,j}| = 0$,

  donc $N(A) = 0$ si et seulement si $A = 0_n$ (axiome de séparation).

  En effet, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul.

- $\displaystyle N(\lambda A) = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda|\,|a_{i,j}| \right) = \max_{1 \le j \le n} \left(|\lambda| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) = |\lambda|\, N(A)$, on a donc l'axiome d'homogénéité.

- Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \le \sum_{i=1}^{n} \big(|a_{i,j}| + |b_{i,j}| \big) = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{i=1}^{n} |b_{i,j}| \le N(A) + N(B)\ .$$

  Cette majoration étant vraie pour tout j, elle est vraie pour un indice j réalisant le maximum, on en déduit l'inégalité triangulaire $N(A+B) \le N(A) + N(B)$.

2.a. Soit $X = (x_1, \cdots, x_n)$, alors $AX = (y_1, \cdots, y_n)$ où $\displaystyle y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j$ pour tout i. Donc

$$\begin{aligned}
\|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\,|x_j| = \sum_{j=1}^{n} \left(|x_j| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \\
&\le \sum_{j=1}^{n} |x_j|\, N(A) = N(A) \cdot \|X\|_1\ .
\end{aligned}$$

b. On a $AE_s = \begin{pmatrix} a_{1,s} \\ \vdots \\ a_{n,s} \end{pmatrix}$, c'est la s-ième colonne de la matrice A donc, par hypothèse,

$$\|AE_s\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_{i,s}| = N(A)\ .$$

c.
- Pour $X \in S_n$, on a $\|X\|_1 = 1$ donc $\|AX\|_1 \le N(A)$ d'après le **a.**, et le **b.** montre l'existence d'un vecteur X de S_n (prendre $X = E_s$) tel que $\|AX\|_1 = N(A)$. On a donc $N(A) = \displaystyle\max_{X \in S_n} \|AX\|_1$.

- Pour $X \in \mathbb{C}^n$ non nul, l'inégalité du **a.** peut s'écrire $\dfrac{\|AX\|_1}{\|X\|_1} \le N(A)$, et ce majorant $N(A)$ est atteint pour $X = E_s$, on conclut que $N(A) = \displaystyle\max_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}$.

3. Posons $C = (c_{i,j}) = AB$, alors $\displaystyle c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Alors, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |c_{i,j}| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}| \\
&\underset{(=)}{\le} \sum_{k=1}^{n} \left(|b_{k,j}| \sum_{i=1}^{n} |a_{i,k}| \right) \le N(A) \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_{k,j}| \le N(A) \cdot N(B)\ .
\end{aligned}$$

Cette majoration étant vraie pour tout j, elle est vraie pour un indice j réalisant le maximum, on a donc prouvé que $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$.

Remarque. On pouvait aussi dire en utilisant la question **2.** que, pour tout $X \in S_n$, on a

$$\big\|(AB)X\big\|_1 = \big\|A(BX)\big\|_1 \leq N(A) \cdot \|BX\|_1 \leq N(A) \cdot N(B)$$

et, cette majoration étant vraie pour tout $X \in S_n$, elle est vraie pour un $X_0 \in S_n$ tel que $\big\|(AB)X_0\big\|_1 = N(AB)$, et conclure ainsi plus simplement que $N(AB) \leq N(A) \cdot N(B)$.

PARTIE B. Des calculs préliminaires.

4. Rappelons que, si $M = (m_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n, si $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$, alors $(DM)_{i,j} = d_i m_{i,j}$ alors que $(MD)_{i,j} = d_j m_{i,j}$. *En d'autres termes, le fait de multiplier M à gauche (DM) par une matrice diagonale multiplie chaque ligne de M par le coefficient correspondant de la diagonale, alors que si on multiplie M à droite (MD), ce sont les colonnes qui sont multipliées par les coefficients diagonaux de D.*

Ici, avec $d_i = t^i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient $b_{i,j}(t) = (D_t A D_t^{-1})_{i,j} = t^i a_{i,j} t^{-j} = t^{i-j} a_{i,j}$.

5.a. Les $a_{i,j}$ sont ici supposés nuls pour $i > j$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les coefficients de $D_t A D_t^{-1}$ situés strictement au-dessus de la diagonale ($i < j$) tendent vers 0 puisqu'alors $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{i-j} = 0$, ceux de la diagonale ne dépendent pas de t. Puisque la limite d'une fonction à valeurs matricielles s'obtient coefficient par coefficient (et ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$), on a ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty} (D_t A D_t^{-1}) = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$.

b. Posons $\Delta = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$, on a $N(\Delta) = \max\limits_{1\leq i\leq n} |a_{i,i}| < 1$. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} (D_t A D_t^{-1}) = \Delta$, on déduit $\lim\limits_{t\to+\infty} N(D_t A D_t^{-1}) = N(\Delta) < 1$ (par exemple parce que la norme est 1-lipschitzienne donc continue), il en résulte que $N(D_t A D_t^{-1}) < 1$ pour $t > 0$ suffisamment grand.

c. Fixons $t_0 > 0$ tel que $N(D_{t_0} A D_{t_0}^{-1}) < 1$. De la question **3.**, par une récurrence immédiate, on déduit que, pour toute matrice M et pour tout k entier naturel, on a $N(M^k) \leq \big(N(M)\big)^k$.
On a donc, pour tout k entier, $0 \leq N(D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1}) = N\big((D_{t_0} A D_{t_0}^{-1})^k\big) \leq \big(N(D_{t_0} A D_{t_0}^{-1})\big)^k$ et, comme cette dernière suite (géométrique de raison positive et strictement inférieure à 1) tend vers 0, on déduit du théorème d'encadrement que $\lim\limits_{k\to+\infty} N(D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1}) = 0$.

d. On a donc, dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $\lim\limits_{k\to+\infty} D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1} = 0_n$ (matrice nulle).

On a prouvé ce résultat en utilisant la norme N mais, comme on est en dimension finie, on sait que le résultat ne dépend pas du choix de la norme.

L'application $\varphi : M \mapsto D_{t_0}^{-1} M D_{t_0}$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, est linéaire en dimension finie, donc continue. On déduit donc que $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(D_{t_0} A^k D_{t_0}^{-1}) = \varphi(0_n)$, soit $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

PARTIE C. Propriétés du rayon spectral.

6.
- $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 1\}$, donc $\rho(A) = 1$.
- $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$, donc $\rho(B) = 0$.
- $\mathrm{Sp}(C) = \{0, 1\}$, donc $\rho(C) = 1$.
- $\mathrm{Sp}(D) = \{i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}\}$, donc $\rho(D) = \sqrt{2}$.
- $\chi_E = (X-1)(X-4)$, donc $\mathrm{Sp}(E) = \{1, 4\}$ et $\rho(E) = 4$.

7.a. On a $\mathrm{Sp}(\mu A) = \big\{\mu\,\lambda\ ;\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\big\}$, d'où $\rho(\mu A) = |\mu|\,\rho(A)$ est vrai.

b. En reprenant les matrices de la question **6.**, on a $\rho(B) = \rho(B^\top) = 0$, alors que la somme $B + B^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour rayon spectral 1. L'inégalité proposée est donc fausse.

c. Avec les notations de **6.**, on a $BB^\top = A$, donc $\rho(BB^\top) = \rho(A) = 1 > \rho(B)\rho(B^\top) = 0$, l'inégalité proposée est fausse aussi.

d. Deux matrices semblables ont le même spectre, donc le même rayon spectral, on a donc bien $\rho(P^{-1}AP) = \rho(A)$.

e. Une matrice et sa transposée ont le même spectre, donc le même rayon spectral, on a donc bien $\rho(A^\top) = \rho(A)$.

8. Soit λ une valeur propre de A, et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé, i.e. $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. On a alors $\|AX\|_1 = \|\lambda X\|_1 = |\lambda|\,\|X\|_1$, mais $\|AX\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$ d'après **2.a.** On a donc $|\lambda|\,\|X\|_1 \leq N(A) \cdot \|X\|_1$, et comme $\|X\|_1 > 0$, on déduit $|\lambda| \leq N(A)$. Ceci étant vrai pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on conclut que $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} |\lambda| \leq N(A)$.

9. Ceci généralise la question précédente: soit λ une valeur propre de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, soit X un vecteur propre associé, alors il est classique que, pour tout k entier naturel, on a $A^k X = \lambda^k X$, donc

$$N(A^k) = \sup_{Y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A^k Y\|_1}{\|Y\|_1} \geq \frac{\|A^k X\|_1}{\|X\|_1} = \frac{\|\lambda^k X\|_1}{\|X\|_1} = |\lambda^k| = |\lambda|^k = \big(\rho(A)\big)^k .$$

10. • Si $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$, alors $\lim\limits_{k\to+\infty} N(A^k) = 0$, donc l'inégalité de la question **9.** entraîne $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(A)^k = 0$, ce qui entraîne $\rho(A) < 1$.

• Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\rho(A) < 1$. On sait que A est trigonalisable: $A = PTP^{-1}$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Les coefficients diagonaux $t_{i,i}$ de la matrice T sont les valeurs propres de A, qui vérifient par hypothèse $|t_{i,i}| < 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. On déduit alors de la question **5.** que $\lim\limits_{k\to+\infty} T^k = 0_n$. Par continuité de l'application linéaire $M \mapsto PMP^{-1}$, on conclut que $A^k = PT^kP^{-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$.

11. De **10.** et **7.a.**, on déduit immédiatement que

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{A}{\alpha}\right)^k = 0_n \iff \rho\left(\frac{A}{\alpha}\right) < 1 \iff \frac{\rho(A)}{\alpha} < 1 \iff \alpha > \rho(A) .$$

12. De **9.**, on déduit que $\big(N(A^k)\big)^{1/k} \geq \rho(A)$. Mais, si on se donne $\varepsilon > 0$, alors $\rho(A) + \varepsilon > \rho(A)$, la question **11.** permet alors d'affirmer que $\left(\dfrac{A}{\rho(A)+\varepsilon}\right)^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0_n$, ce qui entraîne $\dfrac{N(A^k)}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe alors un rang $K \in \mathbb{N}^*$ à partir duquel $\dfrac{N(A^k)}{\big(\rho(A)+\varepsilon\big)^k} \leq 1$. Pour tout $k \geq K$, on a alors $\rho(A) \leq \big(N(A^k)\big)^{1/k} \leq \rho(A) + \varepsilon$. On a ainsi prouvé que $\lim\limits_{k\to+\infty} \big(N(A^k)\big)^{1/k} = \rho(A)$.

13. Prouvons d'abord que $N(A^k) \leq N(B^k)$ pour tout k.

Posons $A^k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $B^k = (b_{i,j}^{(k)})_{1 \leq i,j \leq n}$, montrons par récurrence la propriété

$$(\mathcal{P}_k) \quad : \qquad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \big|a_{i,j}^{(k)}\big| \leq b_{i,j}^{(k)} \ .$$

- $(\mathcal{P}_0)$ est vrai car $A^0 = B^0 = I_n$ donc $a_{i,j}^{(0)} = b_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}$;
- $(\mathcal{P}_1)$ est vrai aussi car $b_{i,j}^{(1)} = b_{i,j} = \big|a_{i,j}\big| = \big|a_{i,j}^{(1)}\big|$;
- Supposons $(\mathcal{P}_k)$ vrai pour $k \in \mathbb{N}$ donné. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\left|a_{i,j}^{(k+1)}\right| = \left|\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}^{(k)} a_{l,j}\right| \leq \sum_{l=1}^{n} \big|a_{i,l}^{(k)}\big| \, \big|a_{l,j}\big| \leq \sum_{l=1}^{n} b_{i,l}^{(k)} b_{l,j} = b_{i,j}^{(k+1)} \ ,$$

ce qui prouve $(\mathcal{P}_{k+1})$.

On en déduit facilement que $N(A^k) \leq N(B^k)$, puis que $\big(N(A^k)\big)^{1/k} \leq \big(N(B^k)\big)^{1/k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et, par passage à la limite, que $\rho(A) \leq \rho(B)$.

PARTIE D. Caractérisation des matrices nilpotentes.

14. On sait que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable, donc A est semblable à une matrice $R = (r_{i,j})$ triangulaire supérieure (et donc $R \in \mathcal{S}_A$). Les coefficients diagonaux de cette matrice R sont les valeurs propres de A. Mais $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$ puisque A admet X^p comme polynôme annulateur, et finalement $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ puisque A est non-inversible. Donc $r_{i,i} = 0$ pour tout i.

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la matrice $S(t) = D_t R D_t^{-1}$ est semblable à R donc $S(t) \in \mathcal{S}_A$ par transitivité de la relation de similitude, et elle a pour coefficients $s_{i,j}(t) = t^{i-j} r_{i,j}$. Ces coefficients sont nuls pour $i \geq j$ et, pour $i < j$ on a $\lim\limits_{t \to +\infty} s_{i,j}(t) = 0$. Donc $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0_n$. La matrice nulle, que l'on peut écrire comme limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{S}_A$, par exemple $\lim\limits_{k \to +\infty} S(k) = 0_n$, est donc adhérente à la partie $\mathcal{S}_A$.

15. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\varphi_z(M) = \chi_M(z) = \det(zI_n - M)$. L'application $\tau_z : M \mapsto zI_n - M$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui-même, est clairement continue, par exemple car elle est 1-lipschitzienne. L'application $\delta : M \mapsto \det(M)$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vers $\mathbb{C}$, est continue (c'est une propriété de cours). La composée $\varphi_z = \delta \circ \tau_z$ est donc continue.

16. Si $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$, il existe une suite (A_k) de matrices appartenant à $\mathcal{S}_A$ et qui converge vers 0_n. Les matrices A_k étant semblables à A, on a $\chi_{A_k} = \chi_A$ pour tout k. Par ailleurs, de $\lim\limits_{k \to +\infty} A_k = 0_n$, on déduit de la question **15.** que $\forall z \in \mathbb{C} \quad \lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{A_k}(z) = \chi_{0_n}(z) = z^n$, autrement dit $\chi_A(z) = z^n$ pour tout z complexe. Donc $\chi_A = X^n$. Le théorème de Cayley-Hamilton donne enfin $0_n = \chi_A(A) = A^n$, donc A est nilpotente. On a ainsi prouvé l'équivalence:

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $0_n \in \overline{\mathcal{S}_A}$.