

EXERCICES sur les ESPACES PRÉHILBERTIENS et EUCLIDIENS
PSI2 2023-2024

Produit scalaire, norme associée, orthogonalité

1. Soit E un espace préhilbertien réel. Soient f et g deux applications de E vers E telles que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|f(y)) = (g(x)|y).$$

Montrer que f et g sont des endomorphismes de E .

2. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f'(t) g'(t) dt + f(1) g(0) + f(0) g(1).$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .

3. Soient a et b deux vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien réel E . Pour tout vecteur x non nul de E , on pose $\varphi(x) = \frac{(x|a)(x|b)}{\|x\|^2}$. Exprimer $\varphi(x)$ à l'aide des vecteurs $u = a + b$ et $v = a - b$. Déterminer les réels

$$m = \min_{x \in E \setminus \{0\}} \varphi(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in E \setminus \{0\}} \varphi(x).$$

4. Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Comparer les rangs des matrices A et $A^\top A$. *On pourra s'intéresser aux noyaux des applications linéaires canoniquement associées à ces matrices.*

5. Soit $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt.$$

On considère les sous-espaces

$$F = \{f \in E \mid \forall x \in [0, 1] \quad f(x) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{f \in E \mid \forall x \in [-1, 0] \quad f(x) = 0\}.$$

- a. Montrer que les sous-espaces F et G sont orthogonaux.
- b. A-t-on $E = F \oplus G$?
- c. Montrer que $F^\perp = G$.

6*. Soit E un espace préhilbertien réel, soient x_1, \dots, x_n des vecteurs de E . On suppose qu'il existe un réel positif M tel que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n \quad \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\| \leq M.$$

Montrer que $\sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq M^2$.

Familles orthogonales ou orthonormales

7. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $(P, Q) \in E^2$, on pose $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$.

- a. Montrer que l'on définit bien ainsi un produit scalaire sur l'espace vectoriel E .
- b. Calculer $(X^p|X^q)$ pour p et q entiers naturels.
- c. Orthonormaliser la famille $(1, X, X^2)$ pour ce produit scalaire.

8. Soit (e_1, \dots, e_n) une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E , telle que $\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x|e_i)^2$. Montrer que cette famille est orthogonale, puis que c'est une base orthonormale de E .

9.a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos n\theta .$$

On pourra procéder par récurrence, après avoir transformé en produit l'expression $\cos(n+2)x + \cos nx$.

b. Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)Q(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx .$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Montrer que la famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans cet espace préhilbertien.

10*. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme de E , de trace nulle.

a. Montrer qu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $(u(x)|x) = 0$.

b. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u a tous ses coefficients diagonaux nuls. On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de E .

Projecteurs orthogonaux

11. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $I(a, b) = \int_0^\pi (a \sin x + b \cos x - x)^2 dx$. Déterminer le minimum de $I(a, b)$ lorsque (a, b) décrit \mathbb{R}^2 .

12. L'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire $(A|B) = \text{tr}(A^\top B)$. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1, soit \mathcal{H} l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle. Déterminer la distance $d(J, \mathcal{H})$.

13. Soit p un projecteur dans un espace euclidien E . Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|x\|$.

14. L'espace vectoriel \mathbb{R}^4 est muni de sa structure euclidienne canonique. Écrire la matrice A (relativement à la base canonique) du projecteur orthogonal sur le sous-espace vectoriel F défini par les équations

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} .$$

15. L'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire canonique défini par la relation $(A|B) = \text{tr}(A^\top B) = \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$. Soit $M = (m_{i,j}) \in E$. Calculer la distance de la matrice M au sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.

16. Soit E un espace euclidien de dimension n , soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E , soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur orthogonal de rang r .

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \|p(x)\|^2 = (p(x)|x)$.

b. Calculer la somme $S = \sum_{i=1}^n \|p(e_i)\|^2$.

17. Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E . Prouver l'équivalence

$$\text{Im}(p) \subset \text{Im}(q) \iff \forall x \in E \quad \|p(x)\| \leq \|q(x)\|.$$

Isométries. Matrices orthogonales.

18. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice que l'on suppose à la fois orthogonale et triangulaire supérieure. Montrer que A est diagonale et que ses coefficients diagonaux valent 1 ou -1 .

19.a. Soit E un espace euclidien. Soit \mathcal{B} une base de E , soit \mathcal{E} son orthonormalisée. Montrer que la matrice de passage de \mathcal{E} vers \mathcal{B} est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux strictement positifs.

b. En déduire que, si A est une matrice de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice orthogonale Q et une matrice triangulaire supérieure R à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $A = QR$. En utilisant éventuellement l'exercice **18.** ci-dessus, montrer l'unicité de cette "décomposition QR".

20*. Déterminer les matrices orthogonales de $O_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont positifs ou nuls.

21. Soit $A = (a_{ij}) \in O(n)$. Montrer que $\sum_{i,j} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}$ et $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$. On pourra utiliser le vecteur $U = (1, 1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^n .

22. Soit $u \in O(E)$, où E est un espace euclidien.

a. Montrer que $(\text{Ker}(u - \text{id}_E))^\perp = \text{Im}(u - \text{id}_E)$.

b. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on considère l'endomorphisme $r_k = \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} u^j$. Soit x un vecteur de E . Déterminer $\lim_{k \rightarrow +\infty} r_k(x)$.

23. Soit E un espace euclidien, soient H et K deux hyperplans vectoriels de E , de vecteurs normaux unitaires \vec{u} et \vec{v} respectivement. On note s la réflexion d'hyperplan H , t la réflexion d'hyperplan K . À quelle condition a-t-on $s \circ t = t \circ s$? Interpréter alors géométriquement la transformation composée $f = t \circ s$.

Matrices et endomorphismes symétriques. Théorème spectral.

24. Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M(M^\top M)^2 = I_n$.

25. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$ et $A^2 = A^\top$.

a. Donner un polynôme annulateur de A .

b. On suppose que $0 \in \text{Sp}(A)$. Déterminer alors $\text{Sp}(A)$. Montrer que A est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec une matrice de passage orthogonale.

26. Soit E un espace euclidien, soit u un endomorphisme symétrique de E , de valeurs propres (distinctes) $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, rangées dans l'ordre croissant ($\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$). Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, notons E_i le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i .

a. Montrer que $\forall x \in E \quad \lambda_1 \|x\|^2 \leq (u(x)|x) \leq \lambda_m \|x\|^2$.

b. Pour quels vecteurs x l'une des deux inégalités ci-dessus est-elle une égalité ?

c. Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \frac{1}{2}(M + M^\top)$. On note α (resp. β) la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de S . Montrer que toutes les valeurs propres réelles de M appartiennent à l'intervalle $[\alpha, \beta]$. Qu'en déduit-on lorsque M est antisymétrique ?

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice-colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que

$$X^\top X = n \quad \text{et} \quad X^\top AX = \text{tr}(A).$$

Indication. Considérer l'endomorphisme u de \mathbb{R}^n canoniquement associé à la matrice $M = \frac{1}{2}(A + A^\top)$.

28. Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que

$$(\text{tr}(A))^2 \leq \text{tr}(A^2) \cdot \text{rg}(A).$$

29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique.

a. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^\top AX = 0$.

b. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont strictement positives. Montrer que la matrice $M = A + B$ est inversible.

30. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonale si et seulement si A est symétrique et a pour coefficients diagonaux ses valeurs propres. On pourra utiliser la norme $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)}$.

31.a. Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls. Montrer que

$$\forall V \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{tr}(DV) \leq \text{tr}(D).$$

b. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique dont les valeurs propres sont positives ou nulles. Montrer que

$$\forall U \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{tr}(AU) \leq \text{tr}(A).$$

32. Soit E un espace euclidien. Un endomorphisme autoadjoint u de E est dit **positif** si on a $\forall x \in E \quad (u(x)|x) \geq 0$.

- a. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, démontrer que u est positif si et seulement si $\text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+$.
- b. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint positif. Montrer qu'il existe un endomorphisme autoadjoint positif v tel que $v^2 = u$.
- c*. Montrer l'unicité de v dans la question précédente.

33. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives. Montrer l'équivalence

$$AS = SA \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad AS^k = S^k A .$$

34. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). Montrer que $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$.

35. Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme autoadjoint défini positif. Montrer l'inégalité

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x|y)^2 \leq (u(x)|x) (u^{-1}(y)|y) .$$

36. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique réelle.

- a. Montrer que A^2 est symétrique réelle et que $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}_-$.
- b. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable sur \mathbb{C} , à valeurs propres imaginaires pures.
- c. Montrer que $\text{Ker}(A^2) = \text{Ker}(A)$.
- d.* En utilisant c., montrer que le résultat du b. est vrai même si A n'est pas inversible.

37. Soit E euclidien, soit $u \in \text{O}(E)$ une isométrie vectorielle.

- a. Montrer que l'endomorphisme $v = u + u^{-1}$ est autoadjoint.
- b. En déduire que E contient au moins une droite ou un plan stable par u .
- c. Montrer que E est somme directe orthogonale de droites et de plans stables par u .
- d. Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant de la forme (1) ou (-1) ou $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ avec θ réel.

38*. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ qui commutent ($AB = BA$).
Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

39. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$X^T A X = 0 \iff A X = 0 .$$

40. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = \min\{i, j\}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère la matrice $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1, et on pose $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En utilisant les matrices A_k , montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

41.a. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, où I est un intervalle de \mathbb{R} . Soient x_1, \dots, x_n des points de I . Prouver l'inégalité

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

b. Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Prouver l'inégalité $\sqrt[n]{\det(B)} \leq \frac{1}{n} \operatorname{tr}(B)$.

c. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leq \prod_{i=1}^n a_{i,i}$. On pourra poser $b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\sqrt{a_{i,i} a_{j,j}}}$.

Étude du plan et de l'espace euclidiens

42. Reconnaître les endomorphismes de l'espace euclidien $E = \mathbb{R}^3$ représentés par les matrices suivantes:

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{6} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \\ -\sqrt{6} & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & -4 & 4 \\ 4 & -8 & -1 \\ -4 & -1 & -8 \end{pmatrix}.$$

43. Écrire la matrice, dans \mathbb{R}^3 , de la rotation d'axe D dirigé et orienté par le vecteur $\vec{u} = (1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

44. Un endomorphisme f de \mathbb{R}^3 est représenté par la matrice $M = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale. Éléments caractéristiques de f ?

45. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a^2 & ab + c & ac - b \\ ab - c & b^2 & bc + a \\ ac + b & bc - a & c^2 \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

a. Décomposer M en $M = S + A$ avec S symétrique et A antisymétrique. Interpréter géométriquement les matrices S et A .

b. Interpréter géométriquement l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice A .

46. Soit E un espace euclidien orienté de dimension trois, soit a un vecteur non nul de E .

a. Montrer que l'application $f : x \mapsto a \wedge x$ est un endomorphisme de E . Préciser son noyau et son image.

b. Soit $b \in E$. Calculer $a \wedge (a \wedge b)$. Préciser à quelles conditions sur b l'équation $a \wedge x = b$ admet des solutions, et résoudre alors complètement cette équation.