DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 6
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

Une étude du rayon spectral d'une matrice et de son lien avec une "norme subordonnée" (cas particulier d'un théorème de Gelfand), extraite d'un sujet X-ENS-ESPCI posé récemment dans la filière PC.

Dans la partie A, il y a un enchaînement de questions assez voisines les unes des autres, et qui n'ont guère posé de problèmes même si la rédaction n'en est pas toujours optimale.

5.b. Ici, les erreurs de rédaction commencent à devenir assez nombreuses.

L'erreur la plus grave est celle, rencontrée dans plusieurs copies, consistant à confondre une suite avec sa limite, je m'explique: certains d'entre vous arrivent à prétendre que, si une suite (u_n) admet une limite l, alors u_n est égal à l pour n assez grand!!!!

5.d. Nombreuses erreurs d'argumentation. Il faut dire ici que, si $N(A^k)$ tend vers 0, alors A^k tend vers 0_n. Ceci n'a rien à voir avec l'axiome de séparation de la norme, ni avec la continuité de la norme! C'est simplement la définition de la convergence d'une suite dans un espace vectoriel normé: on dit en effet que (x_k) tend vers l dans un e.v.n. (E, N) lorsque $\lim\limits_{k\to+\infty} N(x_k - l) = 0$. Il fallait par ailleurs mentionner la continuité du produit matriciel (ou bien utiliser l'inégalité démontrée en **Q3.**) pour montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} D_{t_0}A^kD_{t_0}^{-1} = 0_n$ entraîne $\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = 0_n$.

8. et 9. Attention! Le nombre réel positif $\rho(A)$ n'est pas nécessairement valeur propre de A. En revanche, il existe une valeur propre de A dont le **module** vaut $\rho(A)$.

11. Quelques rédactions maladroites pour cette question très facile!

13. Il fallait ici **démontrer** que $N(A^k) \leq N(B^k)$ pour tout k (*récurrence facile*), il ne suffisait pas d'affirmer ce résultat sans preuve! Pour cela, il fallait travailler sur les coefficients $a_{i,j}^{(k)}$ et $b_{i,j}^{(k)}$ des matrices A^k et B^k en introduisant clairement ces notations qui ne sont pas mentionnées par l'énoncé.

14. Quelques confusions: si R est semblable à A, alors R^k est semblable à A^k mais pas à A.

16. Utiliser le théorème de Cayley-Hamilton pour conclure que $A^n = 0_n$, et énoncer une conclusion claire!