CALCUL INTÉGRAL

Remarque préliminaire.

Dans tout le programme de PSI, on ne définit la notion d'intégrale sur un intervalle que pour des fonctions continues par morceaux. Il s'agit là d'une limitation due à la construction de la notion d'intégrale sur laquelle se basent les programmes des classes préparatoires, à savoir la **théorie de l'intégrale de Riemann** (on commence par définir des intégrales de certaines fonctions réelles sur un segment en les encadrant des fonctions en escalier, puis on définit des intégrales "généralisées" sur des intervalles quelconques par un passage à la limite). Dans les cursus universitaires, on travaille plutôt sur la **théorie de l'intégrale de Lebesgue**, de nature différente, qui n'impose pas de se restreindre à des fonctions continues par morceaux (ou, plus généralement, "intégrables au sens de Riemann").

Les théorèmes qui vont suivre mentionnent (uniquement pour rester conforme au programme) que certaines fonctions doivent être continues par morceaux, mais dans la pratique de l'utilisation de ces théorèmes, la vérification de cette propriété de régularité ne sera pas exigée. Dans le même esprit, quand nous dirons qu'une fonction est intégrable sur un intervalle, cela sous-entendra qu'elle est continue par morceaux sur cet intervalle, mais ce ne sera pas toujours explicité.

I. <u>Le théorème de convergence dominée (de Lebesgue).</u>

Il s'agit dans ce paragraphe d'introduire un théorème d'**interversion limite-intégrale**.

<u>Remarque.</u> Un premier théorème de ce type a déjà été rencontré, concernant des intégrales de fonctions continues **<u>sur un segment</u>**, avec une hypothèse de **convergence uniforme**. Si l'on travaille sur un intervalle quelconque, cette hypothèse de convergence uniforme n'autorise plus à intervertir limite et intégrale, on s'en convainc en étudiant l'exemple suivant: l'intervalle d'étude est ici $I = \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2}\, e^{-\frac{x}{n}}$, le lecteur est invité à vérifier que $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \dfrac{1}{en} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, et pourtant $\displaystyle\int_I f_n = 1$ pour tout n, on a donc

$$1 = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n \neq \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = 0 .$$

Nous admettrons le résultat suivant:

<u>Théorème.</u> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que:

- la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux ;

- <u>Hypothèse de domination</u>: il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad \left|f_n(x)\right| \leq \varphi(x) .$$

Alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f .$$

Preuve. Largement hors programme. Je me bornerai juste à remarquer que l'intégrabilité des fonctions f_n est une conséquence immédiate de l'hypothèse de domination, et l'intégrabilité de f aussi puisque, de cette même hypothèse de domination, il résulte immédiatement par un passage à la limite ($n \to +\infty$, avec $x \in I$ fixé) que $\left|f(x)\right| \leq \varphi(x)$ pour tout $x \in I$.

Commentaires. C'est bien un théorème d'interversion limite-intégrale puisque la conclusion s'écrit $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t$. Dans la pratique, on pourra se dispenser de mentionner la continuité par morceaux des fonctions f_n et f.

Exemple 1. Ce théorème peut s'appliquer sur un intervalle I quelconque, et en particulier sur un segment, lorsque l'hypothèse de convergence uniforme n'est pas satisfaite: posons par exemple $f_n(x) = \cos^n(x)$ pour $x \in I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers la fonction f, continue par morceaux, qui vaut 1 en 0 et qui est nulle sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. *Cette convergence ne peut être uniforme sur I puisque, les f_n étant continues sur I, la fonction f devrait alors aussi être continue sur I et ce n'est pas le cas!* En revanche, l'hypothèse de domination est satisfaite en choisissant $\varphi = 1$ (fonction constante, évidemment intégrable sur le segment I). On peut donc affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\lim_{n\to+\infty}\cos^n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$

Exemple 2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Exemple 3. Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$ lorsque $n\to+\infty$.

II. Intégrales dépendant d'un paramètre.

1. Position du problème.

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f : A\times I \to \mathbb{K}$ une application, on notera $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$. Si, pour tout $x \in A$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on peut alors poser $g(x) = \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$, en notant a et b les bornes de l'intervalle d'intégration I, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les propriétés de régularité (continuité, dérivabilité) de l'application g ainsi construite sur A.

Vocabulaire. Dans le contexte ci-dessus, on dit que $g(x)$ est une **intégrale dépendant du paramètre** x, donc x est le **paramètre** (variable libre), t est la **variable d'intégration** (variable muette).

Notation. Une fois fixé $x \in A$, l'**application partielle** $t \mapsto f(x,t)$, qui est définie sur l'intervalle I, est parfois notée $f(x,\cdot)$. De même, une fois fixé $t \in I$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$, définie sur l'intervalle A, est parfois notée $f(\cdot,t)$.

Un exemple. Pour x réel, posons $g(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^x\,(1+t)}$ lorsque cette intégrale converge. Une étude laissée au lecteur montre que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$, on a donc $A = D_g = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ et $I = [1,+\infty[$ pour reprendre les notations de l'introduction.

On posera donc $f(x,t) = \dfrac{1}{t^x\,(1+t)}$ pour $(x,t) \in A \times I$. Nous n'avons pas encore présenté les théorèmes qui permettraient de démontrer la continuité de la fonction g ou de la dériver, il est toutefois élémentaire de montrer que la fonction g est décroissante sur A (*en revenant à la définition d'une fonction décroissante*). Toujours avec des méthodes élémentaires, le lecteur pourra prouver la relation $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x)+g(x+1) = \dfrac{1}{x}$ et obtenir des équivalents de $g(x)$ lorsque $x \to 0^+$ ou lorsque $x \to +\infty$.

Voyons maintenant des exemples classiques en mathématiques ou en physique / SII.

La fonction gamma. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\mathrm{d}t$. On vérifie facilement que cette intégrale converge si (et seulement si) $x > 0$, on a donc ici $A = I = \mathbb{R}_+^*$. Une intégration par parties donne la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)\ .$$

On obtient facilement l'égalité $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout n entier naturel non nul.

Transformée de Laplace. Soit $f : I = \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une application continue par morceaux. Notons A l'ensemble des réels p tels que l'application $t \mapsto f(t)\,e^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $p \in A$, on pose $\mathcal{L}(f)(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-pt}\,\mathrm{d}t$. On montre que l'ensemble A est, soit $\mathbb{R}$, soit $\emptyset$, soit une demi-droite de la forme $[p_0, +\infty[$ ou $]p_0, +\infty[$ avec p_0 réel. L'application $\mathcal{L}(f) : A \to \mathbb{C}$ est la **transformée de Laplace** de l'application f.

Transformée de Fourier. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, posons $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ e^{-ixt}\ \mathrm{d}t$. L'application $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est la **transformée de Fourier** du "signal" f.

2. Le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Voici une adaptation du théorème de convergence dominée (à paramètre "discret"), que nous avons étudié dans le paragraphe **I.**.

Théorème. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un point adhérent à A (i.e. appartenant à A ou borne de A). Soient une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ et une fonction $l : I \to \mathbb{K}$. On suppose que:

- pour tout $t \in I$, on a $\lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$; ("convergence simple")

- pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

- la fonction l est continue par morceaux sur I ;

- Hypothèse de domination: il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad \big|f(x,t)\big| \le \varphi(t)\ .$$

Alors l'application l et les applications partielles $t \mapsto f(x,t)$, pour tout $x \in A$, sont intégrables sur I, et on a

$$\lim_{x \to a} \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I l(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Commentaires. La conclusion est encore une interversion limite-intégrale puisqu'elle s'écrit $\lim_{x\to a}\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t = \int_I \Big(\lim_{x\to a} f(x,t)\Big)\ \mathrm{d}t$. Dans la pratique, on pourra se dispenser de mentionner la continuité par morceaux des fonctions l et $t\mapsto f(x,t)$.

Preuve. On le déduit du théorème "discret" précédent par la caractérisation séquentielle de la limite. Il s'agit de montrer que, pour toute suite (a_n) *de points de* A *qui tend vers* a*, on a* $\lim_{n\to+\infty}\int_I f(a_n,t)\ \mathrm{d}t = \int_I l(t)\ \mathrm{d}t$*. On pose alors* $f_n(t) = f(a_n,t)$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ *et tout* $t\in I$*, et on applique la version discrète du théorème à la suite de fonctions* (f_n)*.*

3. **Le théorème de continuité.**

Théorème. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f : A\times I \to \mathbb{K}$ une application. On suppose que:

(H1): pour tout $t\in I$, l'application partielle $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(H2): pour tout $x\in A$, l'application partielle $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H3): il existe une fonction $\varphi : I\to\mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t)\in A\times I \qquad \big|f(x,t)\big| \le \varphi(t)\ .$$

Alors la fonction $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Commentaire. L'hypothèse **(H3)** est appelée **hypothèse de domination**, et elle a beaucoup plus d'importance que l'hypothèse **(H2)** qui, elle, est formulée uniquement pour respecter les limitations du programme. L'hypothèse **(H1)** doit, elle aussi, être considérée comme essentielle: d'une certaine façon, c'est parce que l'intégrande dépend continûment du paramètre x que l'intégrale dépend aussi continûment de ce paramètre, même si cette condition n'est pas suffisante.

Preuve. L'hypothèse de domination entraîne l'intégrabilité sur I *de l'application partielle* $t\mapsto f(x,t)$ *pour tout* $x\in A$*, donc l'existence de l'intégrale* $g(x)$*.*

Montrer la continuité de g *en un point* a *de* A *revient à montrer que* $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$*. Or, il suffit pour cela d'appliquer le théorème de convergence dominée à paramètre continu en posant* $l(t) = f(a,t)$ *pour tout* $t\in I$*. L'hypothèse* **(H1)** *entraîne que* $\lim_{x\to a} f(x,t) = l(t)$ *pour tout* $t\in I$*. L'hypothèse* **(H2)** *entraîne les régularités nécessaires. L'hypothèse de domination est la même. Et la conclusion de ce théorème est bien que* $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$*, ce que l'on voulait démontrer.*

Exemple 1. Soit $u : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. Sa transformée de Fourier $\widehat{u} : x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\, e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$ est une fonction définie et continue sur $\mathbb{R}$. *En effet, l'application* $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, $(x,t)\mapsto u(t)e^{-ixt}$ *vérifie clairement les trois hypothèses de ce théorème, en prenant* $\varphi(t) = \big|u(t)\big|$ *pour la domination.*

Exemple 2. La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$, la preuve en est laissée au lecteur. *La fonction* $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ *convient pour la domination.*

Remarque. Dans de très nombreux exemples (comme l'exemple 2 ci-dessus), la fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ est continue sur $A \times I$, en tant que fonction de deux variables réelles. Or, la continuité d'une fonction f de deux variables entraîne la continuité des applications partielles $x \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto f(x,t)$. *Ces applications partielles sont effectivement la composée de f avec une des applications $x \mapsto (x,t)$, ou bien $t \mapsto (x,t)$, qui sont aussi des applications continues puisque "affines" en dimension finie.* Il suffira donc de mentionner cette continuité par rapport aux deux variables pour satisfaire les hypothèses **(H1)** et **(H2)**.

Adaptation. Il se peut que l'hypothèse de domination ne soit pas satisfaite sur tout l'intervalle A décrit par le paramètre x, mais seulement sur tout segment inclus dans cet intervalle. Par exemple, posons $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, le lecteur vérifiera aisément que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$, autrement dit l'ensemble de définition de g est $A = \mathbb{R}_+^*$. Il serait agréable de montrer que la fonction g est continue sur cet intervalle A. Malheureusement, la condition de domination **(H3)** n'est pas satisfaite sur cet intervalle: en effet, si une fonction $\varphi : A \to \mathbb{R}_+$ vérifie $\forall (x,t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \quad \left|\dfrac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \varphi(t)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on doit avoir $\varphi(t) \geq \sup\limits_{x>0} \left(\dfrac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\right) = \dfrac{t}{1+t^2}$, mézalor une telle fonction φ ne peut être intégrable sur $\mathbb{R}_+$ puisque $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^2}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il y a donc une contradiction. En revanche, si on fixe un segment $S = [a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ (i.e. avec $0 < a < b$), alors la condition de domination **(H3)** est satisfaite sur ce segment: en posant $\varphi_S(t) = e^{-at}$, on a bien

$$\forall (x,t) \in S \times \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{t\,e^{-xt}}{1+t^2}\right| \leq \varphi_S(t)$$

et la fonction φ_S est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit, par le théorème de continuité ci-dessus, que g est continue sur le segment S. Comme g est continue sur tout segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, alors g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. *En effet, ceci a déjà été mentionné dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions, paragraphe* **I.2.a.**

Voici donc une adaptation du théorème précédent:

Théorème de continuité adapté. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application. On suppose que:

(H1): pour tout $t \in I$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;

(H2): pour tout $x \in A$, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H3'): pour tout segment S de A, il existe une fonction $\varphi_S : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in S \times I \qquad \big|f(x,t)\big| \leq \varphi_S(t)\ .$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

Preuve. En effet, d'après le théorème de continuité ci-dessus, g est continue sur tout segment S inclus dans A, elle est donc continue sur A.

Commentaire. En pratique, on peut remplacer les segments par d'autres types d'intervalles adaptés à la situation.

4. **Le théorème de dérivation.**

Théorème. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application. On suppose que:

(H1): pour tout $t \in I$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A ;

(H2): pour tout $x \in A$, l'application partielle $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;

(H3): pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H4): il existe une fonction $\psi : I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t) \ .$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, et on a

$$\forall x \in A \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Commentaire 1. L'hypothèse **(H4)** de ce théorème est encore une "**hypothèse de domination**", mais portant cette fois-ci, non pas sur l'intégrande, mais sur sa dérivée par rapport au paramètre x.

Commentaire 2. La relation obtenue comme conclusion du théorème peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

il s'agit donc ici d'intervertir dérivation (par rapport à la variable x) et intégration (par rapport à la variable t). La dérivée de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dérivée (mais ce n'est pas par rapport à la même variable).

Adaptation. Une fonction définie sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si et seulement si sa restriction à tout segment inclus dans A est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est donc possible d'adapter le théorème de dérivation de la même façon que celui de continuité, c'est-à-dire en vérifiant l'hypothèse de domination **(H4)** sur tout segment de A (ou sur d'autres types d'intervalles adaptés à la situation). Dans le cas des segments, on remplace **(H4)** par

(H4'): pour tout segment S inclus dans A, il existe une fonction $\psi_S : I \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in S \times I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_S(t) \ .$$

Extension. On peut étendre ce résultat aux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) de la façon suivante:

Extension du théorème de dérivation. Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$, soit $k \in \mathbb{N}^*$, soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une application. On suppose que:

(H1): pour tout $t \in I$, l'application partielle $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A ;

(H2'): pour tout $x \in A$, pour tout $j \in [\![0, k-1]\!]$, l'application $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ est intégrable sur I ;

(H3): pour tout $x \in A$, l'application partielle $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;

(H4): pour tout segment S de A, il existe une fonction $\psi_S : I \to \mathbb{R}_+$, continue par morceaux et intégrable sur I, telle que

$$\forall (x,t) \in S \times I \qquad \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \psi_S(t) \ .$$

Alors la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur A, et on a

$$\forall x \in A \quad \forall j \in [\![1, k]\!] \qquad g^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t \ .$$

5. Cas particulier des intégrales sur un segment.

Ce paragraphe est plutôt à réserver à une deuxième lecture.

Dans le théorème de continuité, lorsque l'intervalle d'intégration I est un segment et que la fonction de deux variables f est continue sur $A \times I$, alors il est inutile de chercher une majoration explicite de $\left|f(x,t)\right|$ pour satisfaire la condition de domination. En effet, si S est un segment inclus dans A, le "pavé" $K = S \times I$ est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$, et le théorème des bornes atteintes affirme alors que la fonction f, qui est continue, est bornée sur K, i.e.

$$\exists M_S \in \mathbb{R}_+ \quad \forall (x,t) \in S \times I \qquad \left|f(x,t)\right| \leq M_S \ .$$

Comme la fonction constante $t \mapsto M_S$ est intégrable sur le segment I, ceci permet de valider la condition de domination **(H3)** du théorème de continuité.

De même, dans l'application du théorème de dérivabilité, si l'intervalle d'intégration I est un segment et si l'application $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur le produit $A \times I$, l'hypothèse de domination sur tout segment **(H4')** est automatiquement vérifiée. En effet, si S est un segment inclus dans A, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est alors bornée (donc majorée en module par une constante positive M'_S) sur le pavé $S \times I$, et la fonction constante $t \mapsto M'_S$ est intégrable sur le segment I.

III. Théorème d'intégration terme à terme.

Il s'agit dans ce paragraphe d'introduire un théorème d'**interversion série-intégrale**.

Remarque. Un premier théorème de ce type a déjà été rencontré, concernant des intégrales de fonctions continues **sur un segment**, avec une hypothèse de **convergence uniforme** de la série de fonctions (ou de convergence normale qui entraîne la convergence uniforme).

Nous admettrons le résultat suivant:

Théorème. Soit (f_n) une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que:

(H1): chaque fonction f_n est continue par morceaux et intégrable sur I ;

(H2): la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I, et la fonction somme s est continue par morceaux sur I ;

(H3): la série numérique $\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ est convergente.

Alors la fonction s est intégrable sur I, et on a:

$$\int_I s(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Remarque. L'hypothèse de continuité par morceaux de la fonction somme $s = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, imposée par les limitations du programme, n'a pas autant d'importance que l'hypothèse **(H3)** de convergence de la série de terme général $\int_I |f_n|$.

Exemple 1. En utilisant le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-x}$, calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\,\mathrm{d}x$. On admettra pour cela que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque. Il y a aussi des exemples où aucun des deux théorèmes du cours ne s'applique, mais où l'on peut justifier "à la main" l'interversion série-intégrale. C'est notamment le cas lorsque des séries géométriques interviennent puisqu'il est alors possible d'expliciter les restes et de les majorer directement. Voici un exemple de ce type: Pour montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$, on peut remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^1 x^{2k}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-x^2)^k \mathrm{d}x$, tandis que $\dfrac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}(1) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (-x^2)^k\right) \mathrm{d}x$. Mais, si l'on pose $f_k(x) = (-x^2)^k$, la série $\sum f_k$ ne converge pas uniformément sur le **segment** $S = [0,1]$ (il n'y a d'ailleurs même pas convergence simple au point 1), on ne peut donc pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un segment (*cf.* cours sur les suites et séries de fonctions). Et, en se plaçant sur $I = [0,1[$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \int_I |f_k| = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{2k+1}$ est divergente, ce qui n'autorise pas non plus à utiliser le théorème donné dans ce paragraphe. Pour montrer l'égalité recherchée, on travaille alors sur des sommes partielles (ou sur les restes), en écrivant par exemple que

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-x^2)^k \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \ ,
\end{aligned}$$

et cette intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini puisqu'on majore facilement sa valeur absolue par $\displaystyle\int_0^1 x^{2n+2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2n+3}$.

Remarque. Dans certains cas aussi, le théorème ci-dessus ne s'applique pas, mais l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée appliqué aux sommes partielles. On peut procéder comme cela dans l'exemple donné ci-dessus (même si je préfère exploiter à fond le fait que l'on reconnaît une série géométrique, ce qui permet d'expliciter et de majorer les restes). Allons-y: avec la même série de fonctions $\displaystyle\sum_{k \geq 0} f_k$ sur $I = [0, 1[$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x^2)^k = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} \ .$$

La suite de fonctions (s_n) converge simplement sur I vers la fonction $s : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, et on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \qquad \left| s_n(x) \right| \leq \varphi(x) = \frac{2}{1+x^2} \ ,$$

cette fonction φ étant clairement intégrable sur $[0, 1[$ (puisque prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0, 1]$). Le théorème de convergence dominée s'applique donc et donne $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 s_n(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 s(x) \, \mathrm{d}x$, soit

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \ ,$$

ce que l'on voulait obtenir.

Exemple 2. Calculer $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} \right) \mathrm{d}x$.