DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5

PSI2 2023-2024 **Durée: 4 heures** **20/01/2024**

EXERCICE

Dans cet exercice, on considère l'équation différentielle

$$(\mathbf{E}) : \quad x^2(1-x)\,y'' - x(1+x)\,y' + y = 2x^3 \ ,$$

ainsi que l'équation homogène associée

$$(\mathbf{H}) : \quad x^2(1-x)\,y'' - x(1+x)\,y' + y = 0 \ .$$

PARTIE A.

Dans cette première partie, on recherche les solutions développables en série entière de l'équation homogène **(H)**. On fixe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière associée $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence r non nul. Pour $x \in]-r, r[$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-r, r[$, et exprimer f' et f'' comme sommes de séries entières.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geq 2}$ de nombres réels non nuls telle que

$$\forall x \in]-r, r[\qquad x^2(1-x)\,f''(x) - x(1+x)\,f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})\,x^n \ .$$

3. En déduire quelles sont les solutions de **(H)** qui sont développables en série entière sur $]-1, 1[$.

PARTIE B.

On note I l'un des intervalles $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$\forall x \in I \qquad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x) \ .$$

4. Montrer que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, et exprimer z' et z'' à l'aide de y, y' et y''.

5. Montrer que y est solution de **(E)** sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle

$$(\mathbf{F}) : \qquad x\,z'' + z' = 2x$$

6. En déduire l'ensemble des solutions sur I de l'équation différentielle **(E)**.

PARTIE C.

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $g_\lambda(x) = \dfrac{x^3}{2(1-x)} + \dfrac{\lambda\, x}{1-x}$.

7. Développer l'expression $g_\lambda(1+t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.

8. En déduire qu'il existe une seule valeur de λ pour laquelle la fonction g_λ admet une limite finie au point 1.

9. En utilisant le cours sur les séries entières, montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{1-x} & \text{si} \quad x \neq 1 \\ -1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

10. Quelles sont les solutions de l'équation différentielle **(E)** sur $\mathbb{R}_+^*$?

PROBLÈME

PARTIE I.

Pour x réel strictement positif et n entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!} .$$

1. Justifier l'existence de $R_n(x)$. Que vaut la somme $T_n(x) + R_n(x)$?

2. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto e^{nt}$, prouver la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad R_n(x) = e^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (u\, e^{-u})^n \, \mathrm{d}u .$$

3. Soit y un réel strictement positif. On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} y^n$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire que, si $y < e^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

4. On suppose dans cette question que $x \in]0, 1[$. Montrer que la fonction $u \mapsto u\, e^{-u}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum M tel que $M < e^{-1}$. En déduire que $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}$.

5. Démontrer la relation $n! = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-t} \, \mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

6. Montrer que $T_n(x) = e^{nx} \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_x^{+\infty} (u\, e^{-u})^n \, \mathrm{d}u$.

7. En déduire que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = o(e^{nx})$ lorsque n tend vers $+\infty$. *On pourra écrire* $(u\, e^{-u})^n \le (xe^{-x})^{n-1}\, u\, e^{-u}$ *pour* $u \ge x$.

Une estimation asymptotique de $T_n(x)$, pour $x = 1$, sera obtenue dans la suite du problème.

PARTIE II. Un calcul de l'intégrale de Gauss

On considère dans cette partie les deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t \qquad ; \qquad h(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2} \, \mathrm{d}u \right)^2 .$$

8. Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser les dérivées g' et h'. En déduire que la fonction $g + h$ est constante sur $\mathbb{R}$, égale à $\dfrac{\pi}{4}$.

9. Montrer l'inégalité suivante pour tout nombre réel x :

$$0 \le g(x) \le \frac{\pi}{4} e^{-x^2} .$$

En déduire la limite de $g(x)$, puis de $h(x)$, lorsque x tend vers $+\infty$, puis déterminer la valeur de l'intégrale de Gauss $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u$.

PARTIE III.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, strictement décroissante, telle que $f'(0) = 0$, $f''(0) < 0$ et $f(1) = 0$.

Pour $x \in]0,1[$,on pose $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2} \ln\left(\dfrac{f(x)}{f(0)}\right)$.

10. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = \dfrac{\left|f''(0)\right|}{2\, f(0)}$.

11. Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x)$.

12. En déduire qu'il existe un réel a strictement positif tel que $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \le f(0)\, e^{-ax^2}$.

13. Pour tout n entier naturel non nul, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ \qquad g_n(u) = \begin{cases} \left(\dfrac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n & \text{si} \quad 0 \le u \le \sqrt{n} \\ 0 & \text{si} \qquad u > \sqrt{n} \end{cases}.$$

Montrer que chaque fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, et que la suite de fonctions (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue g que l'on déterminera.

14. En déduire que

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\big(f(0)\big)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}}\ .$$

PARTIE IV.

On rappelle la formule de Stirling: $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la PARTIE I.

15. Montrer que $R_n(1) = \dfrac{n^{n+1}}{n!} \displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\, e^{nt}\,\mathrm{d}t$.

16. En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque n tend vers l'infini. Prouver que $T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^n$.

PARTIE V.

Dans cette partie, on considère l'expérience aléatoire suivante: une urne contient n boules numérotées de 1 à n, et on effectue $n+1$ tirages avec remise. On note X le nombre de tirages nécessaires pour amener, pour la première fois, une boule déjà tirée. On dira que X est le "temps d'attente de la première répétition". *Par exemple, avec* $n = 5$*, si les 6 tirages donnent successivement* 3-2-1-5-2-3, *on pose* $X = 5$.

17. Justifier la bonne définition de la variable aléatoire X. Quel est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre ?

18. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que

$$P(X > k+1) = P\big(X > k+1 \mid X > k\big) \cdot P(X > k) \; .$$

En déduire que $P(X > k) = \dfrac{n!}{n^k \, (n-k)!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

19. Montrer que $\mathrm{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(X > k)$.

20. En utilisant les parties précédentes, donner un équivalent simple de $\mathrm{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.