CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 5
PSI2 2023-2024

EXERCICE

d'aprés CC-INP, 2019, filière PC

PARTIE A.

1. On sait que toute fonction somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle de convergence $]-r,r[$, et que l'on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme. Donc, pour $x \in]-r,r[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n\, x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n\, x^{n-2}\ .$$

2. Pour $x \in]-r,r[$, posons $A(x) = x^2(1-x)\, f''(x) - x(1+x)\, f'(x) + f(x)$. Alors

$$\begin{aligned}
A(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3\ (\text{ou } 2)}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + (a_1 - a_1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \Big((n-1)^2\, a_n - (n-1)^2\, a_{n-1} \Big)\, x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n\, (a_n - a_{n-1})\, x^n
\end{aligned}$$

en posant $b_n = (n-1)^2$ pour tout $n \geq 2$, et b_n est bien non nul.

3. Par unicité du développement en série entière, la fonction f est donc solution de **(H)** sur $]-r,r[$ si et seulement si $\begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2 \quad a_n = a_{n-1} \end{cases}$. On a alors $f(x) = a_1 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$, le coefficient a_1 restant arbitraire.

En dehors du cas trivial $a_1 = 0$ où f est la fonction nulle, qui est bien une solution de **(H)** développable en série entière sur $\mathbb{R}$ (dans ce cas $r = +\infty$), on reconnaît une série géométrique de rayon de convergence $r = 1$, et de somme $f(x) = a_1\, \dfrac{x}{1-x}$.

Les solutions de **(H)** développables en série entière sur $]-1,1[$ sont donc les fonctions

$$x \mapsto \alpha\, \frac{x}{1-x}\ , \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}\ .$$

PARTIE B.

4. La fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ comme produit de deux fonctions du même métal. On obtient

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2}\, y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x)\ ,$$

puis

$$z''(x) = \frac{2}{x^3}\, y(x) - \frac{2}{x^2}\, y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x)\ .$$

5. Partons de l'équation **(F)**:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}) \quad &\Longleftrightarrow \quad x\,z''(x)+z'(x)=2x\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x^2}\,y(x)-\frac{2}{x}\,y'(x)+(1-x)\,y''(x)-\frac{1}{x^2}\,y(x)+\Big(\frac{1}{x}-1\Big)\,y'(x)=2x\\
&\Longleftrightarrow \quad 2\,y(x)-2x\,y'(x)+x^2(1-x)\,y''(x)-y(x)+x(1-x)\,y'(x)=2x^3\\
&\Longleftrightarrow \quad x^2(1-x)\,y''(x)-x(1+x)\,y'(x)+y(x)=2x^3 \quad\Longleftrightarrow\quad (\mathbf{E})\ .
\end{aligned}$$

Remarquons que ce calcul revient à résoudre **(E)** sur I en posant le changement de fonction inconnue $y(x)=\dfrac{x}{1-x}\,z(x)$. Comme, d'après la question **3.**, $y_0=\dfrac{x}{1-x}$ est une solution de l'équation homogène **(H)** ne s'annulant pas sur I, ce n'est rien d'autre que la méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) vue en cours.

6. Ne nous interdisons pas d'être astucieux puisqu'un œil exercé aura reconnu dans le premier membre de l'équation **(F)** la dérivée d'un produit! En effet,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{F}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(x\,z'(x)\big)=2x\\
&\Longleftrightarrow \quad x\,z'(x)=x^2+C\\
&\Longleftrightarrow \quad z'(x)=x+\frac{C}{x}\\
&\Longleftrightarrow \quad z(x)=\frac{x^2}{2}+C\,\ln(x)+D\\
&\Longleftrightarrow \quad y(x)=\frac{x^3}{2(1-x)}+\frac{C\,x\,\ln(x)}{1-x}+\frac{D\,x}{1-x}\ ,
\end{aligned}$$

où C et D sont deux constantes arbitraires.

PARTIE C.

7. Allons-y!

$$g_\lambda(1+t)=\frac{(1+t)^3+2\lambda(1+t)}{-2t}=\frac{t^3+3t^2+3t+1+2\lambda t+2\lambda}{-2t}=-\frac{t^2}{2}-\frac{3t}{2}-\frac{2\lambda+3}{2}-\frac{2\lambda+1}{2t}\ .$$

8. La fonction g_λ admet une limite finie au point 1 si et seulement si $g_\lambda(1+t)$ admet une limite finie lorsque t tend vers 0, donc si et seulement si $2\lambda+1=0$, donc **ssi** $\lambda=-\dfrac{1}{2}$. Il est clair que, dans ce cas, la fonction g_λ (prolongée par continuité au point 1) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est alors polynomiale.

9. Pour $t\in]-1,+\infty[$, posons $H(t)=h(1+t)$. Alors $H(t)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1+t)}{t} & \text{si}\quad t\neq 0\\ -1 & \text{si}\quad t=0\end{cases}$.

Pour $t\in]-1,1[$, on a $H(t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n+1}$. La fonction H est développable en série entière sur $]-1,1[$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Elle est par ailleurs clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ (comme quotient dont le dénominateur ne s'annule pas). Elle est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$. Par translation de la variable, h est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

10. Si y est une solution de **(E)** sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, alors elle est solution de **(E)** sur $]0,1[$ et aussi sur $]1,+\infty[$. D'après la question **6.**, il existe donc quatre constantes λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 telles que

$$y(x) = \begin{cases} g_{\lambda_1}(x) + \mu_1\, h(x) & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ g_{\lambda_2}(x) + \mu_2\, h(x) & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases} .$$

Si $\lambda_1 \neq -\dfrac{1}{2}$ (ou si $\lambda_2 \neq -\dfrac{1}{2}$), alors une telle fonction y aura une limite à gauche (ou à droite) infinie au point 1, d'après la question **8.**. Il est donc nécessaire que $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. On a alors

$$y(x) = \begin{cases} g_{-1/2}(x) + \mu_1\, h(x) & \text{si} \quad x \in]0,1[\\ g_{-1/2}(x) + \mu_2\, h(x) & \text{si} \quad x \in]1,+\infty[\end{cases} .$$

Ensuite, pour que y soit continue au point 1, il est nécessaire que $\mu_1 = \mu_2$. *En effet, la fonction y explicitée ci-dessus admet $g_{-1/2}(1) - \mu_1$ et $g_{-1/2}(1) - \mu_2$ pour limites à gauche et à droite au point 1, ces deux valeurs doivent être égales.* On a finalement nécessairement

$$y(x) = g_{-1/2}(x) + \mu\, h(x) = -\frac{x(1+x)}{2} + \mu\, \frac{x\, \ln(x)}{1-x} ,$$

où μ est une constante arbitraire (la fonction étant prolongée par continuité en 1).

Réciproquement, ces fonctions conviennent puisqu'elles sont alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^2$) sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après la question **9.** et qu'elles sont solutions de **(E)** sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

PROBLÈME

d'après Mines-Ponts 2017, PC

PARTIE I. Exponentielle tronquée

1. $R_n(x)$ est le reste d'ordre n d'une série exponentielle (donc convergente), ce qui justifie son existence. D'après le cours,

$$T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx} .$$

2. Si on applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x à la fonction $f : t \mapsto e^{nt}$, avec $f^{(k)}(t) = n^k e^{nt}$, donc $f^{(k)}(0) = n^k$, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) = \quad e^{nx} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)}{n!}\, \mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x (x-t)^n\, e^{nt}\, \mathrm{d}t \\ &= T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^x u^n\, e^{n(x-u)}\, \mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$= \quad T_n(x) + e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,\int_0^x u^n\,e^{-nu}\,\mathrm{d}u\ ,$$

donc $R_n(x) = e^{nx} - T_n(x) = e^{nx}\,\dfrac{n^{n+1}}{n!}\,\displaystyle\int_0^x u^n\,e^{-nu}\,\mathrm{d}u$. *On a posé le changement de variable* $t = x - u$.

3. Avec $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}y^n$, on a

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}y^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^{n+1}y^n} = y\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = y\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e\,y$$

en écrivant $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = \exp\left((n+1)\,\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et en développant le logarithme à l'ordre 1.

Si $y < e^{-1}$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = ey < 1$, et la série $\sum a_n$ converge par la règle de d'Alembert, donc son terme général tend vers 0. *On peut aussi reprendre les idées de la preuve de la règle de d'Alembert: soit r un réel tel que $ey < r < 1$, il existe alors un rang N à partir duquel $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$. Pour $n \geq N$, on a donc $0 \leq \dfrac{a_{n+1}}{r^{n+1}} \leq \dfrac{a_n}{r^n}$, la suite $\left(\dfrac{a_n}{r^n}\right)$ est donc décroissante à partir du rang N, d'où l'on tire $0 \leq a_n \leq C\,r^n$, pour $n \geq N$, avec $C = \dfrac{a_N}{r^N}$. Par le théorème d'encadrement, on a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

4. Soit $h : u \mapsto ue^{-u}$, alors $h'(u) = (1-u)e^{-u}$, donc h est positive, et strictement croissante sur $[0,1]$. Si $0 \leq u \leq x < 1$, on a alors $0 = h(0) \leq h(u) \leq M = h(x) < e^{-1} = h(1)$. La fonction h admet donc comme maximum sur $[0,x]$ le nombre $M = h(x)$, strictement inférieur à e^{-1}. On en déduit alors que $0 \leq \displaystyle\int_0^x (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u = \int_0^x \big(h(u)\big)^n\,\mathrm{d}u \leq x\,M^n$, donc

$$0 \leq R_n(x) = e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,\int_0^x (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u \leq x\,e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,M^n\ .$$

La question **3.** donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{n+1}}{n!}\,M^n = 0$, soit $R_n(x) = o\big(e^{nx}\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Enfin, $T_n(x) = e^{nx} - R_n(x) = e^{nx} + o\big(e^{nx}\big)$, soit $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}$.

5. Posons $A_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$, intégrale convergente d'après les résultats de croissances comparées puisque $t^2 \times t^n\,e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors $A_0 = 1$ et une intégration par parties donne $A_{n+1} = (n+1)A_n$ pour tout n, donc $A_n = n!$.

6. De la question **5.**, on déduit, par le changement de variable $t = nu$, que

$$\int_0^{+\infty} (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n^{n+1}}\,\int_0^{+\infty} t^n\,e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^{n+1}}\ .$$

Alors, en reprenant l'expression de $R_n(x)$ obtenue en **2.**,

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= e^{nx} - R_n(x) \;=\; e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,\Big(\frac{n!}{n^{n+1}} - \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u\Big)\\
&= e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,\Big(\int_0^{+\infty} (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u - \int_0^x (ue^{-u})^n\,\mathrm{d}u\Big)\\
&= e^{nx}\,\frac{n^{n+1}}{n!}\,\int_x^{+\infty} (u\,e^{-u})^n\,\mathrm{d}u\,.
\end{aligned}
$$

7. La fonction $h\,:\,u \mapsto ue^{-u}$ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ avec $h(1)=e^{-1}$ et $\lim\limits_{u\to+\infty} h(u)=0$. Si on fixe $x>1$, on a $\max\limits_{u\in[x,+\infty[}(ue^{-u}) = xe^{-x} < e^{-1}$. On en déduit la majoration

$$
0 \le e^{-nx}\,T_n(x) \le \frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n-1}\int_x^{+\infty} ue^{-u}\,\mathrm{d}u \le \frac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^{n-1}
$$

en majorant l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u$ par $\displaystyle\int_0^{+\infty} ue^{-u}\mathrm{d}u = A_1 = 1$. Comme $xe^{-x}<e^{-1}$, la question **3.** montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^{n+1}}{n!}(xe^{-x})^n = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x)\,e^{-nx}=0$, ce qu'il fallait démontrer.

PARTIE II. Un calcul de l'intégrale de Gauss

8. La fonction $f:x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $F:x\mapsto F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'=f$ par le théorème fondamental de l'analyse. Donc $h=F^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $h'=2FF'=2fF$, soit $h'(x)=2\,e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

Pour $(x,t)\in\mathbb{R}\times[0,1]$, posons $v(x,t)=\dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Pour tout réel x fixé, l'application partielle $t\mapsto v(x,t)$ est continue sur $[0,1]$ donc intégrable sur cet intervalle (puisque c'est un segment). Pour $t\in[0,1]$ fixé, l'application partielle $x\mapsto v(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t) = -2x\,e^{-x^2(1+t^2)}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[0,1]$. Pour la condition de domination, fixons $a>0$; alors pour $(x,t)\in[-a,a]\times[0,1]$, on a la majoration $\Big|\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,t)\Big| \le 2a$ (fonction constante, donc intégrable sur le segment $[0,1]$). La fonction g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout $a>0$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et une dérivation sous le signe intégrale donne :

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\\
&= -2x\,e^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,\mathrm{d}t = -2\,e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \;=\; -h'(x)
\end{aligned}
$$

(la dernière égalité est triviale si $x=0$, sinon elle s'obtient par le changement de variable $u=xt$).

On constate ainsi que la fonction $g+h$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, de dérivée nulle, donc elle est constante. Enfin, $g(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$ et $h(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) + h(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

9. Il est clair que $g(x) \geq 0$ car c'est l'intégrale sur $[0,1]$ d'une fonction positive. D'autre part, $g(x) \leq e^{-x^2} \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}\, e^{-x^2}$. De cet encadrement, il résulte que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = \frac{\pi}{4}$. Mais par ailleurs, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x) = G^2$ et $G \geq 0$ par positivité de l'intégrale, donc $G = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

PARTIE III. Méthode de Laplace

10. De la stricte décroissance de f avec $f(1) = 0$, on déduit que f est strictement positive sur $[0,1[$, d'où la bonne définition de $\varphi(x)$ pour $x \in \,]0,1[$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, donc elle admet un développement limité à l'ordre deux en 0, avec $f'(0) = 0$ par hypothèse. Du développement limité

$$\frac{f(x)}{f(0)} = 1 + \frac{f''(0)}{2f(0)}\, x^2 + o(x^2)\ ,$$

on déduit que $\ln\left(\dfrac{f(x)}{f(0)}\right) = \dfrac{f''(0)}{2f(0)}\, x^2 + o(x^2)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \varphi(x) = -\frac{f''(0)}{2\,f(0)} = \frac{|f''(0)|}{2\,f(0)}$.

11. De façon évidente, $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = +\infty$.

12. Montrons d'abord que φ est minorée, sur l'intervalle $]0,1[$, par un réel strictement positif a. On note d'abord que φ est continue sur $]0,1[$ et admet une limite finie en 0, i.e. elle est prolongeable par continuité en 0. En posant $\varphi(0) = \dfrac{|f''(0)|}{2\,f(0)}$, on la prolonge ainsi en une fonction continue sur $[0,1[$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = +\infty$, il existe donc $\beta \in [0,1[$ tel que $\forall x \in [\beta,1[\quad \varphi(x) \geq 1$. Puis φ atteint sur le segment $[0,\beta]$ un minimum c strictement positif, elle est alors minorée sur $[0,1[$ par le réel strictement positif $a = \min\{c,1\}$.

Enfin, l'inégalité $\varphi(x) \geq a$ se traduit par $\ln\left(\dfrac{f(x)}{f(0)}\right) \leq -ax^2$, puis $f(x) \leq f(0)\, e^{-ax^2}$ sur $]0,1[$, inégalité triviale par ailleurs pour $x = 0$ et pour $x = 1$.

13. Chaque fonction g_n est clairement continue sur chacun des intervalles $[0,\sqrt{n}[$ et $]\sqrt{n},+\infty[$, la continuité de f sur $[0,1]$ entraîne sa continuité à gauche au point $\sqrt{n}$, et enfin $\displaystyle\lim_{x\to(\sqrt{n})^+} g_n(x) = 0 = g_n(\sqrt{n})$, d'où la continuité à droite, et finalement la continuité tout court en le point $\sqrt{n}$.

Si l'on fixe un réel positif u, il existe alors un rang N à partir duquel $\sqrt{n} \geq u$. Pour $n \geq N$, on a alors

$$\ln\big(g_n(u)\big) = n\, \ln\left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right) = -u^2\, \varphi\Big(\frac{u}{\sqrt{n}}\Big) \quad \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \quad -\frac{|f''(0)|}{2\,f(0)}\, u^2$$

d'après **Q10.**, donc

$$\lim_{n\to+\infty} g_n(u) = \exp\left(\frac{f''(0)}{2f(0)}\,u^2\right)\ .$$

On a ainsi prouvé la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite de fonctions continues (g_n) vers la fonction continue $g : u \mapsto \exp\left(\dfrac{f''(0)}{2f(0)}\,u^2\right)$.

14. Posons $I_n = \displaystyle\int_0^1 \big(f(x)\big)^n\ \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}}\left(f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)\right)^n\ \mathrm{d}u$, en utilisant le changement de variable $u = x\sqrt{n}$. On observe alors que

$$\frac{\sqrt{n}}{\big(f(0)\big)^n}\ I_n = \int_0^{\sqrt{n}}\left(\frac{f\left(\frac{u}{\sqrt{n}}\right)}{f(0)}\right)^n\ \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}_+} g_n\ .$$

Or, la suite de fonctions continues (g_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction continue g, et la question **12.** donne la condition de domination

$$\forall u\in\mathbb{R}_+\quad \forall n\in\mathbb{N}^*\qquad 0\le g_n(u)\le e^{-au^2}\ ,$$

cette dernière fonction de la variable u étant continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+} g_n = \int_{\mathbb{R}_+} g = \int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{f''(0)}{2f(0)}u^2\right)\ \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}\,\frac{f(0)}{|f''(0)|}}$$

en utilisant $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ obtenu en **Q9.** et en posant le changement de variable $v = \sqrt{\dfrac{|f''(0)|}{2\,f(0)}}\ u$. Cela fournit bien l'équivalent demandé pour I_n.

PARTIE IV. Formule de Bernstein

15. D'après la question **2.**, on a $R_n(1) = e^n\,\dfrac{n^{n+1}}{n!}\displaystyle\int_0^1 (u\,e^{-u})^n\ \mathrm{d}u$. Le changement de variable $u = 1-t$ donne directement l'expression demandée.

16. La fonction $f : x\mapsto (1-x)e^x$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$, strictement décroissante puisque $f'(x) = -xe^x$ est négatif et ne s'annule que pour $x=0$. On a bien $f(1)=0$, $f'(0)=0$ et $f''(0) = -1 < 0$ puisque $f''(x) = -(x+1)e^x$. On peut donc appliquer les résultats de la PARTIE III. La question **14.** donne alors

$$\int_0^1 \big(f(x)\big)^n\ \mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\ ,\qquad \text{soit}\qquad R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,\frac{n^{n+1}}{n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}e^n$$

en utilisant la formule de Stirling. On a donc $R_n(1) = \dfrac{1}{2}e^n + o(e^n)$. Par différence, on déduit $T_n(1) = e^n - R_n(1) = \dfrac{1}{2}e^n + o(e^n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^n$.

PARTIE V. Temps d'attente de la première répétition

17. On peut modéliser le résultat d'une expérience par une application de $[\![1, n+1]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$, une telle application ne peut être injective puisque Card $\big([\![1, n+1]\!]\big) >$ Card $\big([\![1, n]\!]\big)$, *c'est le principe des tiroirs*, il y aura donc au moins un tirage (et donc aussi une première occurrence) qui amènera une boule déjà tirée. On a clairement $X(\Omega) \subset [\![2, n+1]\!]$, et l'inclusion inverse est vraie aussi puisque, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, le tirage $[1, 2, \cdots, k-1, k-1, \cdots, k-1]$ réalise l'événement $\{X = k\}$.

18. On a clairement $\{X > k+1\} \subset \{X > k\}$, donc $\big(\{X > k+1\} \cap \{X > k\}\big) = \{X > k+1\}$. La définition d'une probabilité conditionnelle donne alors

$$P\big(X > k+1 \,\big|\, X > k\big) = \frac{P(X > k+1)}{P(X > k)} \ .$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $P\big(X > k+1 \,\big|\, X > k\big) = \dfrac{n-k}{n}$: on a déjà tiré k boules distinctes (parmi n), la probabilité que le $k+1$-ème tirage amène une boule non encore tirée est alors $\dfrac{n-k}{n}$ par équiprobabilité. *La formule est cohérente pour* $n = 0$. Partant de $P(X > 0) = 1$,

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad P(X > k) = \prod_{j=0}^{k-1} P\big(X > j+1 \big| X > j\big) = \prod_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{n-j}{n}\Big) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \ ,$$

ce qui donne bien $P(X > k) = \dfrac{n!}{n^k\,(n-k)!}$.

19. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \sum_{k=2}^{n+1} k\, P(X = k) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k\, \Big(P(X > k-1) - P(X > k)\Big) \\
&= \sum_{k=2}^{n+1} k\, P(X > k-1) - \sum_{k=2}^{n} k\, P(X > k) \qquad \textit{car } P(X > n+1) = 0 \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k+1)\, P(X > k) - \sum_{k=2}^{n} k\, P(X > k) \\
&= 2\, P(X > 1) + \sum_{k=2}^{n} \big((k+1) - k\big)\, P(X > k) \ = \ \sum_{k=0}^{n} P(X > k) \ .
\end{aligned}$$

car $P(X > 0) = P(X > 1) = 1$.

20. On a

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^k\,(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!}{n^n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!} = \frac{n!}{n^n}\, T_n(1) \ .$$

En utilisant la formule de Bernstein (question **16.**) et la formule de Stirling, on obtient

$$\mathrm{E}(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} \cdot \frac{1}{2}\, e^n = \sqrt{\frac{\pi n}{2}} \ .$$