PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on note f une application continue de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}$.
On note I_f l'ensemble des réels x pour lesquels l'application $t \mapsto f(t)\, e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
On note J_f l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ est convergente.
Pour tout $x \in J_f$, on posera

$$(Lf)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t\ .$$

On admettra que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

PARTIE A - Généralités

A.1. Quelle inclusion existe-t-il entre les ensembles I_f et J_f ?

A.2. Montrer que, si I_f est non vide, alors I_f est un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$.

A.3. Montrer que, si I_f est non vide, alors l'application Lf est continue sur I_f.

A.4. Comparer I_f et J_f lorsque f est positive.

PARTIE B - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on pose $f(t) = \dfrac{t}{e^t - 1} - 1 + \dfrac{t}{2}$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$.

B.1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, qui sera toujours notée f.

B.2. Déterminer l'ensemble I_f.

B.3. À l'aide d'un développement en série entière, montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}\ .$$

B.4. Donner un développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $(Lf)(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

PARTIE C - Dérivation

C.1. Montrer que, si l'intervalle I_f est non vide, alors la fonction Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathring{I}_f$ (l'intérieur de I_f) et, pour tout n entier naturel, expliciter une fonction g_n telle que $(Lf)^{(n)} = Lg_n$ sur $\mathring{I}_f$.

C.2. Dans le cas particulier où $f(t) = t^n e^{-at}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter les ensembles I_f et J_f, et donner l'expression de $(Lf)(x)$ pour $x \in J_f$.

PARTIE D - Injectivité de la transformation de Laplace

Dans cette partie, on note E l'ensemble des fonctions réelles f continues sur $[0, +\infty[$ pour lesquelles il existe un entier naturel n tel que $f(t) = O(t^n)$ au voisinage de $+\infty$.

D.1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}\big(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}\big)$.

D.2. Montrer que, si $f \in E$, alors $\mathbb{R}_+^* \subset I_f$.

D.3. Montrer que la transformation de Laplace L peut être considérée comme une application linéaire de E vers $\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}\big)$.

D.4. Soit $f \in E$, on définit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ par $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\, e^{-s}\, \mathrm{d}s$.

a. Montrer que $g \in E$.

b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad (Lg)(x) = \dfrac{1}{x}\,(Lf)(x+1)$.

c. On définit h sur $[0,1]$ par $h(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si} \quad u \in]0,1] \\ (Lf)(1) & \text{si} \quad u \;=\; 0 \end{cases}$. Montrer que h est continue sur $[0,1]$ et que, pour tout $x > 0$, on a

$$(Lg)(x) = \int_0^1 u^{x-1}\, h(u)\, \mathrm{d}u\ .$$

D.5. Soit $f \in E$ telle que $Lf = 0$. On définira g et h comme dans la question **D.4.** ci-dessus.

a. Montrer que, pour tout n entier naturel, on a $\displaystyle\int_0^1 u^n\, h(u)\, \mathrm{d}u = 0$.

b. En déduire que $h = 0$ sur $[0,1]$. *On admettra ici le* **théorème de Weierstrass**: *toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

c. Montrer que $f = 0$ et conclure.

PROBLÈME 2

On considère l'application φ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}[X] \qquad \varphi(P) = (X^2 - 1)\, P'' + 2X\, P'\ .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme $U_n = (X^2 - 1)^n$, et on pose $L_n = \dfrac{1}{2^n\, n!}\, U_n^{(n)}$, où $U_n^{(n)}$ représente le polynôme dérivé n-ième du polynôme U_n. On notera a_n le coefficient dominant du polynôme L_n.

PARTIE A.

1. Déterminer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\,(3X^2 - 1)$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré du polynôme L_n et son coefficient dominant a_n.

3. Montrer que la famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Prouver que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

Pour tout n entier naturel, on note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ, et on note $M_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de φ_n relativement à la base canonique $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. Construire la matrice M_n.

7. Montrer que l'endomorphisme φ_n est diagonalisable.

8. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, vérifier la relation

$$(X^2 - 1)\, U_k' - 2k\, X\, U_k = 0\ .$$

9. En dérivant $k+1$ fois la relation ci-dessus, prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in [\![0, n]\!] \qquad (X^2 - 1)\, U_k^{(k+2)} + 2X\, U_k^{(k+1)} - k(k+1)\, U_k^{(k)} = 0\ .$$

10. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que le polynôme L_k est vecteur propre de l'endomorphisme φ_n.

11. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, préciser les éléments propres de l'endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$.

12. Préciser les éléments propres de l'endomorphisme φ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

PARTIE B.

On note $E = \mathcal{C}\big([-1,1], \mathbb{R}\big)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[-1,1]$ vers $\mathbb{R}$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme, on identifiera P avec la fonction polynomiale associée sur $[-1,1]$, et on pourra ainsi considérer P comme un élément de E.

Pour $f \in E$ et $g \in E$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$, on rappelle que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E, et on notera $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Pour $f \in E$, on posera $\|f\|_\infty = \displaystyle\max_{x\in[-1,1]} \big|f(x)\big|$.

13. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes. En intégrant par parties, montrer que

$$\big(\varphi(P)|Q\big) = \big(P|\varphi(Q)\big) \ .$$

14. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale dans l'espace préhilbertien E.

Pour tout n entier naturel, on pose $Q_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|_2}$.

Pour $f \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, on pose $c_k(f) = (Q_k|f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} Q_k(t)\, f(t)\, \mathrm{d}t$.

Si $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) = \displaystyle\inf_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|f - Q\|_2$ la distance de f au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$, pour la norme $\|\cdot\|_2$.

15. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big) = \|f - T_n\|_2$. Interpréter géométriquement ce résultat.

16. Justifier l'égalité, pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$d_2\big(f, \mathbb{R}_n[X]\big)^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \ .$$

17. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} c_k(f)^2$ et l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$.

On admet maintenant le **théorème de Weierstrass:** *cf. problème 1.*

18. Soit $f \in E$, soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon$.

19. En déduire la "relation de Parseval":

$$\forall f \in E \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 = \|f\|_2^2 \ .$$

20. À l'aide d'une identité de polarisation, montrer que

$$\forall (f,g) \in E^2 \qquad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\, c_k(g) = (f|g) \ .$$