ESPACES PRÉHILBERTIENS

I. Produit scalaire et norme associée.

Sur ce sujet, presque tout a déjà été dit dans le chapitre “espaces vectoriels normés”, paragraphe **I.3.** Il y aura ici juste quelques petits rajouts.

Dans tout ce paragraphe, E est un espace préhilbertien réel dont le produit scalaire sera noté $(\cdot|\cdot)$, et on notera $\|\cdot\|$ la norme associée, définie par $\forall x \in E \quad \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

On rappelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** $\big|(x|y)\big| \leq \|x\|\,\|y\|$, et le fait qu'il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Preuve. Voici une preuve différente de celle vue dans le cours sur les espaces vectoriels normés: Soient $x \in E$, $y \in E$. Si x ou y est nul, alors $\big|(x|y)\big| = \|x\|\,\|y\| = 0$. Sinon, considérons les vecteurs unitaires associés $u = \dfrac{x}{\|x\|}$ et $v = \dfrac{y}{\|y\|}$. On a alors

$$0 \leq \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2(u|v) = 2\big(1-(u|v)\big) = 2\left(1 - \frac{(x|y)}{\|x\|\,\|y\|}\right),$$

on en déduit que $(x|y) \leq \|x\|\,\|y\|$. En faisant le même développement avec $\|u+v\|^2 \geq 0$, on obtient $-(x|y) \leq \|x\|\,\|y\|$, puis on conclut que $\big|(x|y)\big| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Remarque. On note que le caractère **défini** n'intervient pas dans cette preuve (il interviendra seulement pour le cas d'égalité). On peut donc énoncer que, si $b : E \times E \to \mathbb{R}$ est une **forme bilinéaire symétrique positive** sur E, alors on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad b(x,y)^2 \leq b(x,x)\,b(y,y)\ .$$

Fin de la preuve (cas d'égalité): Si x est nul ou $y = \lambda x$, alors $\big|(x|y)\big| = \|x\|\|y\|$ immédiatement. Réciproquement, si on a cette égalité, alors soit $x = 0$ ou $y = 0$, soit $u - v = 0$ ou $u + v = 0$ en reprenant les notations de la preuve ci-dessus, on en déduit dans tous les cas que x et y sont colinéaires.

On en déduit le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire: **l'égalité** $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ **a lieu si et seulement si les vecteurs x et y sont “positivement liés”, i.e.**

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff (x = 0_E) \quad \text{ou} \quad (\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\; y = \lambda x)\ .$$

Preuve. Reprenons la démonstration de l'inégalité triangulaire: si $(x,y) \in E^2$,

$$\begin{array}{rcll}
\|x+y\|^2 & = & (x+y|x+y) \;=\; \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x|y) & \\
 & \leq & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\big|(x|y)\big| & \textbf{(1)} \\
 & \leq & \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| & \textbf{(2)} \\
 & = & \big(\|x\| + \|y\|\big)^2\ . &
\end{array}$$

Il y a alors égalité entre les termes extrêmes $\|x+y\|^2$ et $\big(\|x\|+\|y\|\big)^2$ si et seulement s'il y a égalité en **(1)** *et en* **(2)***. Or,* **(2)** *est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans laquelle l'égalité est réalisée si et seulement si x et y sont colinéaires. Et l'inégalité* **(1)** *est une égalité si et seulement si $(x|y) \geq 0$ ce qui, dans le cas de vecteurs colinéaires, signifie qu'ils sont “de même sens” (au sens large, i.e. l'un des deux vecteurs pouvant être nul).*

Remarque. Ce cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire concerne uniquement les normes dérivant d'un produit scalaire, ce n'est pas vrai pour une norme quelconque.

Mentionnons maintenant quelques **identités remarquables** sur les normes associées à un produit scalaire. Des développements

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,(x|y)$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,(x|y)\ ,$$

on déduit (en ajoutant les deux) l'**identité du parallélogramme**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

et, en soustrayant les deux, l'**identité de polarisation**:

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) .$$

Cette dernière permet d'exprimer le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide de normes, et aura des conséquences importantes (par exemple, un endomorphisme de E conserve la norme si et seulement s'il conserve le produit scalaire).

Remarque. L'identité du parallélogramme indique que, si $ABCD$ est un parallélogramme, alors la somme des longueurs de ses deux diagonales est égale à la somme des longueurs de ses quatre côtés:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 .$$

II. Orthogonalité.

1. Vecteurs orthogonaux.

Dans un espace préhilbertien E, on dit que deux vecteurs x et y sont **orthogonaux** lorsque leur produit scalaire $(x|y)$ est nul.

On peut caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs par le

Théorème de Pythagore. Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Preuve. Il suffit de développer $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$, on a donc bien l'équivalence

$$(x|y) = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Commentaire. On retrouve le théorème de Pythagore et sa réciproque de la géométrie de collège: un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Définition. Une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite **orthogonale** si les vecteurs x_i sont deux à deux orthogonaux, i.e.

$$\forall (i,j) \in I^2 \qquad i \neq j \Longrightarrow (x_i|x_j) = 0 .$$

Proposition. Toute famille (finie) orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Preuve. Soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille orthogonale finie dans E préhilbertien, les vecteurs x_i étant tous non nuls. Supposons que l'on ait $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_E$, où λ_1, $\cdots$, λ_n sont des réels. Fixons un indice $j \in [\![1,n]\!]$. En faisant le produit scalaire avec x_j de l'égalité ci-dessus, on obtient $\left(x_j \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) = (x_j|0_E) = 0$, soit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_j|x_i) = 0$, soit $\lambda_j \|x_j\|^2 = 0$, donc $\lambda_j = 0$ puisque le vecteur x_j n'est pas nul.

<u>Proposition.</u> Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille orthogonale finie dans E préhilbertien. On a alors la <u>relation de Pythagore</u>:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \ .$$

Preuve. Le développement par bilinéarité du produit scalaire et l'orthogonalité deux à deux des vecteurs donnent immédiatement

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\|^2 = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i \ \Big| \ \sum_{j=1}^{n} x_j \Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (x_i|x_j) = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \ .$$

<u>Définition.</u> On appelle **famille orthonormale** (ou **orthonormée**) de vecteurs toute famille orthogonale constituée de vecteurs unitaires. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc orthonormale si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I^2 \qquad (x_i|x_j) = \delta_{i,j} \ .$$

Il résulte de ce qui précède que **toute famille orthonormale finie est libre**.

2. <u>Sous-espaces orthogonaux</u>.

Dans un espace préhilbertien E, on dit que deux sous-espaces vectoriels F et G sont **orthogonaux** lorsque tout vecteur de F est orthogonal à tout vecteur de G, i.e.

$$\forall (y,z) \in F \times G \qquad (y|z) = 0 \ .$$

On note parfois $F \perp G$.

Il est immédiat que, si F et G sont orthogonaux, alors $F \cap G = \{0_E\}$, i.e. F et G sont en somme directe. *En effet, si $x \in F \cap G$, alors $(x|x) = 0$, donc $x = 0_E$ par le caractère défini du produit scalaire.*

Plus généralement,

<u>Proposition.</u> Si F_1, $\cdots$, F_m sont des s.e.v. deux à deux orthogonaux, alors ils sont en somme directe.

Preuve. En effet, supposons que l'on ait $\sum_{i=1}^{m} x_i = 0_E$ avec $x_i \in F_i$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, il faut montrer que tous les vecteurs x_i sont nuls. Fixons alors un indice $j \in [\![1,m]\!]$, on a

$$\Big(x_j \ \Big| \ \sum_{i=1}^{m} x_i \Big) = (x_j|0_E) = 0 \ ,$$

mais aussi, par linéarité à droite,

$$\Big(x_j \ \Big| \ \sum_{i=1}^{m} x_i \Big) = \sum_{i=1}^{m} (x_j|x_i) = \|x_j\|^2 \ .$$

Donc $\|x_j\|^2 = 0$ puis $x_j = 0_E$ pour tout j, ce qu'il fallait prouver. On parle dans cette situation de **<u>somme directe orthogonale</u>**, et le sous-espace somme $S = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ peut être noté $S = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_m = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leq i\leq m}} F_i$.

3. <u>Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace</u>.

<u>Définition 1.</u> Soit X une partie d'un espace préhilbertien E, on dit qu'un vecteur v de E est **orthogonal** à X s'il est orthogonal à tout vecteur de X, i.e. si $\forall x \in X \quad (v|x) = 0$.

<u>Définition 2.</u> Si X est une partie de E, on définit l'**orthogonal** de X, noté $X^\perp$, comme étant l'ensemble des vecteurs orthogonaux à X. Ainsi, $X^\perp$ est l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à tout vecteur de X:

$$X^\perp = \left\{ v \in E \mid \forall x \in X \quad (v|x) = 0 \right\} .$$

Voici quelques propriétés élémentaires:

• $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

En effet, $0_E \in X^\perp$ et, si v et w sont dans $X^\perp$, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in X$, on a

$$(\lambda v + w|x) = \lambda(v|x) + (w|x) = 0 ,$$

donc $\lambda v + w \in X^\perp$.

• $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.

• Si $X \subset Y$, alors $Y^\perp \subset X^\perp$.

• $X \subset (X^\perp)^\perp$.

Cette notion sera plus particulièrement utile lorsque la partie X est un sous-espace vectoriel de E. Notons à ce sujet que:

• Si $x_1, \cdots, x_n$ sont des vecteurs de E, alors

$$\{x_1, \cdots, x_n\}^\perp = \big(\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)\big)^\perp .$$

Il est évident que $\big(\mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_n)\big)^\perp \subset \{x_1, \cdots, x_n\}^\perp$. De plus, la bilinéarité du produit scalaire entraîne que, si un vecteur v est orthogonal à chacun des x_i, alors il est orthogonal à toute combinaison linéaire des x_i, et cela fournit l'inclusion réciproque.

À retenir: pour qu'un vecteur soit orthogonal à un s.e.v. F de dimension finie, il suffit qu'il soit orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F.

Dans ce qui suit, F et G désignent des sous-espaces de E.

• Le sous-espace $F^\perp$ est orthogonal à F (*évident*), et en conséquence $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.

• $F \subset (F^\perp)^\perp$ (*preuve facile*)... mais l'inclusion inverse n'est pas toujours vraie, *cf.* exemple ci-dessous.

• Si F et G sont des s.e.v. tels que $F \subset G$, alors $G^\perp \subset F^\perp$.

<u>Remarque 1.</u> Deux sous-espaces F et G de E sont orthogonaux lorsque tout vecteur de l'un est orthogonal à tout vecteur de l'autre, ce qui signifie que chacun des deux sous-espaces est inclus dans l'orthogonal de l'autre (mais cela ne veut pas dire que $G = F^\perp$!). Donc

$$F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp .$$

<u>Remarque 2.</u> Si l'on a toujours $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, autrement dit F et $F^\perp$ sont en somme directe, il ne faut pas croire que F et $F^\perp$ sont toujours supplémentaires, voici en effet un exemple où l'on a $F \oplus F^\perp \neq E$. Prenons $E = \mathbb{R}[X]$, le produit scalaire choisi étant $(P,Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\,\mathrm{d}t$, *le lecteur vérifiera facilement que c'est bien un produit scalaire.* Soit le s.e.v. $H = X \cdot \mathbb{R}[X] = \big\{P \in E \mid P(0) = 0\big\}$, alors H est un hyperplan de E puisque $H = \operatorname{Ker}\varphi$, où φ est la forme linéaire non nulle $P \mapsto \varphi(P) = P(0)$. Alors $H^\perp = \{0\}$: *en effet, si $P \in H^\perp$, alors $(P|XP) = 0$, soit $\displaystyle\int_0^1 t\,P(t)^2\,\mathrm{d}t = 0$, ce qui entraîne que $\forall t \in [0,1] \quad t\,P(t)^2 = 0$ (théorème de stricte positivité, la fonction $t \mapsto t\,P(t)^2$ étant continue et positive sur $[0,1]$), puis que P est le polynôme nul puisqu'il a une infinité de racines.* On voit déjà sur cet exemple que $(H^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E \neq H$, mais aussi que $H^\perp$ n'est pas un supplémentaire de H dans E puisque $H \oplus H^\perp = H \oplus \{0\} = H \neq E$.

III. Un petit détour par les espaces euclidiens.

1. Existence de bases orthonormales.

Théorème. Dans tout espace euclidien E, il existe des bases orthonormales.

Preuve. Par récurrence sur la dimension $n = \dim(E)$.

- Initialisation: si $n = 1$, soit $x \in E$ un vecteur non nul, alors $\omega = \dfrac{x}{\|x\|}$ est unitaire, et (ω) est une base orthonormale de E.

- Hérédité: soit $n \geq 2$, supposons la propriété vraie en dimension $n-1$, soit E un espace euclidien de dimension n. De nouveau, soit $x \in E$ un vecteur non nul, posons $e_n = \dfrac{x}{\|x\|}$, soit $D = \operatorname{Vect}(e_n)$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire e_n. L'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$, $y \mapsto (e_n|y)$ est une forme linéaire sur E, non nulle puisque $\varphi(e_n) = \|e_n\|^2 = 1$, son noyau $H = \operatorname{Ker}(\varphi) = D^\perp$ est donc un hyperplan de E, donc $\dim(H) = n-1$. Si l'on munit H de la restriction du produit scalaire de E, alors H est un espace euclidien de dimension $n-1$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe dans H une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_{n-1})$. Comme les vecteurs e_i, $1 \leq i \leq n-1$, sont tous orthogonaux au vecteur e_n, il est immédiat que $(e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n)$ est une famille orthonormale dans E, donc libre, et c'est donc une base de E puisqu'elle est de cardinal n.

Commentaire. Nous (re)verrons un peu plus loin un procédé algorithmique, le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, permettant la construction effective d'une base orthonormale de E en partant d'une base quelconque.

2. Supplémentaire orthogonal d'un s.e.v.

Proposition. Soit E un espace euclidien de dimension n, soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E et, en particulier, $\dim(F) = n - p$.

Preuve. D'après le théorème ci-dessus, comme F est un espace euclidien si on le munit de la restriction du produit scalaire de E, on sait qu'il existe dans F une base orthonormale $(e_1, \cdots, e_p)$. Considérons l'application

$$\varphi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R}^p \\ x & \mapsto \big((e_1|x), \cdots, (e_p|x)\big) \end{cases} .$$

Cette application φ est clairement linéaire. Elle est surjective, i.e. $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathbb{R}^p$ *puisque, si l'on se donne un élément de l'espace d'arrivée* $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$*, il admet pour antécédent le vecteur* $x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$*: on a en effet* $(e_i|x) = \lambda_i$ *pour tout* $i \in [\![1, p]\!]$*. Enfin, il est immédiat que* $\mathrm{Ker}(\varphi) = F^\perp$*: en effet, un vecteur de E est orthogonal à F si et seulement s'il est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F. En appliquant à φ le théorème du rang, on obtient que*

$$\dim(F^\perp) = \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = n - p\ .$$

Comme on sait que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$*, on déduit que* $\dim(F \oplus F^\perp) = p + (n-p) = n = \dim(E)$*, donc* $F \oplus F^\perp = E$*.*

Commentaire. On dit, dans cette situation, que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F. Je rappelle que tout sous-espace vectoriel F de E (exceptés E et $\{0_E\}$) admet une infinité de supplémentaires, mais parmi tous ces supplémentaires, un seul est orthogonal à F d'où l'usage de l'article défini "**le**". Nous verrons dans le paragraphe suivant une situation plus générale dans laquelle l'orthogonal d'un sous-espace F est un supplémentaire de F.

Théorème de la base orthonormée incomplète. Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_p)$ est une famille orthonormale dans un espace euclidien E de dimension n, alors $p \leq n$, et on peut compléter $\mathcal{X}$ en une base orthonormale $\mathcal{B} = (x_1, \cdots, x_p, x_{p+1}, \cdots, x_n)$ de E.

Preuve. La famille $\mathcal{X}$ est orthonormale, donc libre, d'où $p \leq n$. Soit le s.e.v. $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$ *qui est de dimension p, la famille $\mathcal{X}$ est alors une base orthonormale de F. Puis $F^\perp$ est de dimension $n - p$, et il suffit de choisir dans $F^\perp$ une base orthonormale $(x_{p+1}, \cdots, x_n)$ pour compléter $\mathcal{X}$ en une b.o.n. de E.*

3. Calculs en base orthonormale (BON).

Soit E un espace euclidien de dimension n, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Notons d'abord que, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ est un vecteur de E, alors pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(e_j|x) = \Big(e_j \mid \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i \delta_{i,j} = x_j\ .$$

On peut donc énoncer:

Proposition 1. Les coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormale $\mathcal{B}$ sont les produits scalaires de ce vecteur x avec les vecteurs de la base $\mathcal{B}$:

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \qquad x_i = (e_i|x)\ .$$

On a donc, pour tout $x \in E$, la décomposition $x = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)\, e_i$.

Si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ est un autre vecteur de E, on a, par bilinéarité du produit scalaire,

$$(x|y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j (e_i|e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\ .$$

On peut donc énoncer:

Proposition 2. **Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est la somme des produits deux à deux des coordonnées des deux vecteurs dans une base orthonormale $\mathcal{B}$:**

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = X^\top Y \ ,$$

en introduisant les matrices-colonnes $X= \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$**,** $Y= \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$**.**

Donc $\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \left(X^\top X\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit maintenant u un endomorphisme de E, soit $A = (a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_\mathcal{B}(u)$ sa matrice relativement à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. On a donc $u(e_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Le coefficient $a_{i,j}$ est donc la i-ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ du vecteur $u(e_j)$, ce qui, d'après la **Proposition 1** ci-dessus, permet de l'exprimer comme un produit scalaire, à savoir

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad a_{i,j} = \big(e_i \mid u(e_j)\big) \ .$$

On en déduit par exemple que $\mathrm{tr}(u) = \mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(e_i \mid u(e_i)\big)$.

IV. Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

1. Supplémentaire orthogonal.

Voici un résultat qui généralise la proposition du paragraphe **III.2.**:

Théorème. **Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace E préhilbertien. Alors $V^\perp$ est un supplémentaire de V dans E.**

Remarque. On dit parfois que V "admet un supplémentaire orthogonal".

Preuve. Par analyse-synthèse. Comme V, muni de la restriction du produit scalaire de E, est un espace euclidien, il existe dans V des bases orthonormales, choisissons-en une, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$.

Analyse. Soit $x \in E$, supposons que x admette une décomposition en $x = y + z$ avec $y \in V$ et $z \in V^\perp$. Comme $y \in V$, le vecteur y se décompose dans $\mathcal{B}$ sous la forme $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|y) e_i$.

Mais, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, comme $e_i \in V$ et $z \in V^\perp$, on a $(e_i|y) = (e_i|x) - (e_i|z) = (e_i|x)$.

Finalement, on a explicité y et z en fonction de x: **(*)** $\begin{cases} y \ = \ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i \\ z \ = \ x - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i \end{cases}$*, ce qui prouve l'unicité de la décomposition de ce vecteur x.*

Synthèse. Soit $x \in E$, soient y et z définis par **(*)***, il est alors clair que $x = y + z$ et que $y \in V$. Enfin, z est orthogonal à chaque vecteur e_j $(1 \leq j \leq n)$ puisque*

$$(e_j|z) = \Big(e_j \;\Big|\; x - \sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i\Big) = (e_j|x) - \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)\,(e_j|e_i) = (e_j|x) - \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)\,\delta_{i,j} = 0\ ,$$

le vecteur z est donc orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de V, on a bien $z \in V^\perp$. La décomposition **(*)** *convient.*

Remarque. Dans cette situation, on a $(V^\perp)^\perp = V$. *En effet, l'inclusion $V \subset (V^\perp)^\perp$ est toujours vraie. De plus, si $x \in (V^\perp)^\perp$, d'après le théorème ci-dessus, on peut le décomposer en $x = y + z$ avec $y \in V$ et $z \in V^\perp$. En effectuant le produit scalaire avec z, on a $(z|x) = (z|y) + \|z\|^2$, mais les produits scalaires $(z|x)$ et $(z|y)$ sont nuls tous les deux, il reste donc $\|z\|^2 = 0$, soit $z = 0_E$, donc $x = y$ et $x \in V$.*

2. Projection orthogonale.

Définition. Soit V un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien E. Comme $E = V \oplus V^\perp$, on peut définir le projecteur sur V parallèlement à $V^\perp$, on l'appelle **projecteur orthogonal sur** V (ou **projection orthogonale** sur V), et on le note p_V. Pour tout $x \in E$, le vecteur $p_V(x)$ est le **projeté orthogonal** de x sur V.

De la preuve du théorème ci-dessus, il résulte que:

Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de V, alors

$$\boxed{\forall x \in E \qquad p_V(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)\, e_i\ .}$$

Mentionnons aussi l'**inégalité de Bessel:**

Proposition. Si V est un sous-espace de dimension finie dans E préhilbertien, alors on a

$$\forall x \in E \qquad \big\|p_V(x)\big\| \le \|x\|\ ,$$

avec égalité si et seulement si $x \in V$.

Preuve. On écrit $x = p_V(x) + \big(x - p_V(x)\big)$, c'est la décomposition du vecteur x selon la somme directe $E = V \oplus V^\perp$. Les vecteurs $p_V(x)$ et $x - p_V(x)$ sont orthogonaux l'un à l'autre, la relation de Pythagore donne alors

$$\|x\|^2 = \big\|p_V(x)\big\|^2 + \big\|x - p_V(x)\big\|^2 \ge \big\|p_V(x)\big\|^2\ ,$$

avec égalité **ssi** $\big\|x - p_V(x)\big\| = 0$, *i.e.* **ssi** $x = p_V(x)$, *i.e.* **ssi** $x \in V$.

Remarque. On peut noter que le produit scalaire d'un vecteur avec son projeté orthogonal est toujours positif, et plus précisément que $\big(x \mid p_V(x)\big) = \big\|p_V(x)\big\|^2$. *En effet, en décomposant le vecteur x comme ci-dessus et par bilinéarité du produit scalaire,*

$$\big(x \mid p_V(x)\big) = \big(p_V(x) \mid p_V(x)\big) + \big(x - p_V(x) \mid p_V(x)\big) = \big\|p_V(x)\big\|^2\ ,$$

le deuxième terme étant nul.

<u>**Autre forme de l'inégalité de Bessel.**</u> **Soit** $(e_1, \cdots, e_n)$ **une famille orthonormale finie dans un espace préhilbertien** E**. On a alors**

$$\forall x \in E \qquad \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 \leq \|x\|^2 \ ,$$

avec égalité si et seulement si $x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$**.**

Preuve. Il suffit effectivement d'appliquer l'inégalité de Bessel prouvée ci-dessus en prenant $V = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$*. Comme* $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ *est alors une base orthonormale de* V*, on a* $p_V(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)e_i$ *et* $\|p_V(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$*, c'est donc bien la même inégalité.*

<u>**Pratique.**</u> Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un s.e.v. V de dimension finie, on peut:

- soit appliquer la formule $p_V(x) = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)\, e_i$ si l'on connaît une base <u>**orthonormale**</u> $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de V,
- soit obtenir les coordonnées de $p_V(x)$ dans une base quelconque de V en annulant des produits scalaires, cette méthode est détaillée ci-dessous.

Soit donc $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base quelconque de V, soit $x \in E$, soit $y = p_V(x)$. Ce vecteur y est caractérisé par les conditions $\begin{cases} y \in V \\ x - y \in V^{\perp} \end{cases}$, soit $\begin{cases} \mathbf{(1)}:\ y \in V \\ \mathbf{(2)}:\ \forall i \in [\![1, n]\!] \quad (\varepsilon_i|x - y) = 0 \end{cases}$.

La condition **(1)** nous amène à rechercher y sous la forme $y = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j$, avec les y_j réels.

La condition **(2)** se traduit alors par le système linéaire

$$(\mathbf{S})\ : \qquad \forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \sum_{j=1}^{n} (\varepsilon_i|\varepsilon_j)\, y_j = (\varepsilon_i|x)$$

de n équations à n inconnues. La matrice de ce système **(S)** est la **matrice de Gram** $G = \big((\varepsilon_i|\varepsilon_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit

$$G = \begin{pmatrix} \|\varepsilon_1\|^2 & (\varepsilon_1|\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1|\varepsilon_n) \\ (\varepsilon_2|\varepsilon_1) & \|\varepsilon_2\|^2 & \cdots & (\varepsilon_2|\varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\varepsilon_n|\varepsilon_1) & (\varepsilon_n|\varepsilon_2) & \cdots & \|\varepsilon_n\|^2 \end{pmatrix} .$$

Cette matrice symétrique est inversible. *En effet, supposons qu'une combinaison linéaire des colonnes* $C_1, \cdots, C_n$ *de cette matrice est nulle, soit* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$ *(dans* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$*). Alors, en regardant coordonnée par coordonnée, on a* $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\varepsilon_i|\varepsilon_j) = 0$*, soit* $\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \Big(\varepsilon_i \ \Big|\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varepsilon_j\Big) = 0$*, le vecteur* $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varepsilon_j$*, qui est dans* V *vu son écriture, est aussi dans* $V^{\perp}$*, donc est nul, ce qui entraîne la nullité de tous les réels* λ_j *puisque la famille* $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ *est libre. Les colonnes de la matrice* G *sont donc linéairement indépendantes, donc* $\mathrm{rg}(G) = n$*, et* G *est inversible.* Le système **(S)** est donc un système de Cramer, il admet une solution unique.

Exercice. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P, Q) \mapsto (P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\, Q(t)\, \mathrm{d}t$.
Déterminer le projeté orthogonal de $P = X^2$ sur le plan $V = \mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1, X)$.

3. Distance à un sous-espace de dimension finie.

Dans ce paragraphe, V est toujours un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E. Si x est un vecteur quelconque de E, son projeté orthogonal $p_V(x)$ est alors le vecteur de V "le plus proche" de x. Plus précisément, on a la

Proposition. Si $x \in E$, son projeté $p_V(x)$ est l'unique vecteur y_0 de V tel que

$$\|x - y_0\| = \min_{y \in V} \|x - y\| \ .$$

Preuve. Si $y \in V$, alors $x - y = \big(x - p_V(x)\big) + \big(p_V(x) - y\big)$, avec $x - p_V(x) \in V^\perp$ et $p_V(x) - y \in V$, ces deux vecteurs sont donc orthogonaux, d'où la relation de Pythagore:

$$\|x - y\|^2 = \big\|x - p_V(x)\big\|^2 + \big\|p_V(x) - y\big\|^2 \geq \big\|x - p_V(x)\big\|^2 \ ,$$

avec égalité si et seulement si $y = p_V(x)$.

Cette distance minimale du vecteur x fixé à un vecteur y décrivant le s.e.v. V est appelée **distance de x à V**, et notée $d(x, V)$. On a ainsi

$$d(x, V) = \min_{y \in V} d(x, y) = \min_{y \in V} \|x - y\| = \big\|x - p_V(x)\big\| \ .$$

Calcul pratique. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base **orthonormale** de V, on a

$$d(x, V)^2 = \big\|x - p_V(x)\big\|^2 = \|x\|^2 - \big\|p_V(x)\big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2 \ ,$$

l'égalité du milieu résultant de Pythagore puisque les vecteurs $p_V(x)$ et $x - p_V(x)$ sont orthogonaux.

4. <u>Une application: la régression linéaire (droite des moindres carrés)</u>.

Dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormal, on donne n points $M_1\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $\cdots$, $M_n\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ et une droite affine $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $y = ax + b$. On projette verticalement les points M_i sur la droite $\mathcal{D}$ en des points $H_i\begin{pmatrix}x_i\\ax_i+b\end{pmatrix}$. On suppose que les points M_i n'ont pas tous la même abscisse. L'objectif est de déterminer la droite $\mathcal{D}$ de façon que la somme $\delta(a,b)=\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$ soit minimale.

Pour formaliser cette recherche en termes de projection orthogonale sur un sous-espace d'un espace euclidien, on se place maintenant dans l'espace $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\,\cdot\,|\,\cdot\,)$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|$, et on introduit les vecteurs $\overrightarrow{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, \cdots, y_n)$ et $\overrightarrow{u} = (1, \cdots, 1)$. On introduit enfin les nombres

$$X=\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad Y=\sum_{i=1}^{n} y_i \quad , \quad R=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad , \quad S=\sum_{i=1}^{n} x_iy_i \quad , \quad T=\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ .$$

On observe tout d'abord que $\delta(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\big(y_i-(ax_i+b)\big)^2=\big\|\overrightarrow{y}-(a\,\overrightarrow{x}+b\,\overrightarrow{u})\big\|^2$.

Lorsque le couple (a,b) décrit $\mathbb{R}^2$, le vecteur $a\,\overrightarrow{x}+b\,\overrightarrow{u}$ décrit le plan $P=\mathrm{Vect}\big(\overrightarrow{x},\overrightarrow{u}\big)$ engendré par les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{u}$. *C'est bien un plan car, les x_i n'étant pas tous égaux par hypothèse, les vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas colinéaires.* On sait que, lorsqu'un vecteur $\overrightarrow{z}$ décrit le plan P, la distance $d(\overrightarrow{y},\overrightarrow{z})=\|\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}\|$ est minimale lorsque $\overrightarrow{z}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{y}$ sur le plan P. Or, un vecteur $\overrightarrow{z}=a\,\overrightarrow{x}+b\,\overrightarrow{u}$ de P est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{y}$ sur P si et seulement si $\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}\in P^\perp$, c'est-à-dire si et seulement le vecteur $\overrightarrow{y}-\overrightarrow{z}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{u}$ qui engendrent le plan P, autrement dit si et seulement si les deux produits scalaires $\big(\overrightarrow{y}-(a\,\overrightarrow{x}+b\,\overrightarrow{u})\big|\overrightarrow{x}\big)$ et $\big(\overrightarrow{y}-(a\,\overrightarrow{x}+b\,\overrightarrow{u})\big|\overrightarrow{u}\big)$ sont nuls.

En développant les produits scalaires par linéarité a gauche, on obtient les deux équations permettant d'obtenir a et b pour que $\delta(a,b)$ soit minimal:

$$\begin{cases}\|\overrightarrow{x}\|^2\ a+(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{x})\,b=(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{y})\\(\overrightarrow{x}|\overrightarrow{u})\,a+\|\overrightarrow{u}\|^2\,b=(\overrightarrow{u}|\overrightarrow{y})\end{cases}\ ,\quad \text{soit}\quad \begin{cases}R\,a+X\,b=S\\X\,a+n\,b=Y\end{cases}\ .$$

Le déterminant de ce système est non nul puisque, par Cauchy-Schwarz,

$$n\,R-X^2=\|\overrightarrow{u}\|^2\,\|\overrightarrow{x}\|^2-(\overrightarrow{u}\,|\,\overrightarrow{x})^2\geq 0$$

et l'inégalité est stricte puisque les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}$ sont non colinéaires. On a donc un système de Cramer, admettant une unique solution. La résolution fournit les formules

$$a=\frac{nS-XY}{nR-X^2}\qquad\text{et}\qquad b=\frac{RY-SX}{nR-X^2}\ .$$

V. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Il s'agit ici, dans un espace préhilbertien, d'orthonormaliser une famille libre, c'est-à-dire de construire une famille orthonormale vérifiant certaines conditions. On va prouver l'unicité de cette construction, et donner pour cela un procédé algorithmique. Énonçons donc le

Théorème de Gram-Schmidt. Soit E un espace préhilbertien, soit $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ une famille libre finie de vecteurs de E, de cardinal n. Alors il existe une unique famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ de n vecteurs de E telle que:

(C1): la famille $\mathcal{E}$ est orthonormale ;

(C2): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$;

(C3): pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(e_k|x_k) > 0$.

Définition. Cette famille $\mathcal{E}$ est appelée l'**orthonormalisée** de la famille $\mathcal{X}$.

Preuve de l'existence. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on posera $V_k = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$. Comme la famille $(x_1, \cdots, x_k)$ est libre et de cardinal k, on a $\dim(V_k) = k$.

On construit les vecteurs e_k, avec $1 \leq k \leq n$, de la façon suivante:

- on pose d'abord $v_1 = x_1$ et $e_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$;

- pour k de 2 à n, on note v_k la différence entre x_k et son projeté orthogonal sur V_{k-1}, soit $v_k = x_k - p_{V_{k-1}}(x_k)$, puis on "norme" ce vecteur v_k en introduisant $e_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|}$.

Tout d'abord ceci a bien un sens: en effet, le vecteur x_1 est non nul puisqu'il est extrait d'une famille libre ; ensuite, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, le vecteur v_k est non nul car s'il était nul cela signifierait que $x_k \in V_{k-1}$ et la famille $(x_1, \cdots, x_k)$ serait liée ce qui est absurde.

Les vecteurs e_k sont tous unitaires par construction et, pour $k \in [\![2, n]\!]$, on a $v_k \in V_{k-1}^{\perp}$ par construction. Il est par ailleurs immédiat que $v_k \in V_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Donc, si $1 \leq i < j \leq n$, les vecteurs v_i et v_j sont orthogonaux car $v_i \in V_i$ alors que $v_j \in V_{j-1}^{\perp} \subset V_i^{\perp}$, cette inclusion résultant de l'inclusion $V_i \subset V_{j-1}$ car $i \leq j-1$. La famille $(v_1, \cdots, v_n)$ est donc orthogonale, et la famille $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale.

On a vu que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $e_k \in V_k$, d'où immédiatement $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) \subset V_k$. La famille $(e_1, \cdots, e_k)$ étant libre car orthonormale, les sous-espaces $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k)$ et $V_k = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$ sont tous deux de dimension k, donc ils sont égaux.

Enfin, $(e_1|x_1) = \|x_1\| > 0$ et, pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, en posant $w_k = p_{V_{k-1}}(x_k)$, on a $x_k = v_k + w_k$, les deux vecteurs étant orthogonaux, donc

$$(v_k|x_k) = (v_k|v_k + w_k) = \|v_k\|^2 > 0 ,$$

l'inégalité étant stricte puisque $x_k \notin V_{k-1}$, puis $(e_k|x_k) = \dfrac{(v_k|x_k)}{\|v_k\|} = \|v_k\| > 0$.

L'unicité de la famille $\mathcal{E}$ sera prouvée ultérieurement.

__**À retenir. Procédé algorithmique**__**.** On pose d'abord $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ puis, pour k de 2 à n, on construit d'abord le vecteur v_k (différence entre x_k et son projeté orthogonal sur V_{k-1}) par $v_k = x_k - p_{V_{k-1}}(x_k) = x_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}(e_i|x_k)e_i$, et on norme enfin ce vecteur: $e_k = \dfrac{v_k}{\|v_k\|}$.

__**Conséquence**__**.** Dans un espace euclidien de dimension n, on dispose d'un procédé permettant de construire une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_n)$ en partant d'une base quelconque $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$. Cette base "orthonormalisée" vérifiera en outre les propriétés

$$(\mathbf{C2}): \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \cdots, x_k)$$

et

$$(\mathbf{C3}): \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \qquad (e_k|x_k) > 0 \ .$$

Si l'on note $R = P_{\mathcal{E},\mathcal{X}} = (r_{i,j})$ la matrice de passage de la base orthonormalisée $\mathcal{E}$ vers la base initiale $\mathcal{X}$, on a alors $x_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r_{i,j}e_i$ pour tout j. La condition **(C2)** montre que $x_j \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_j)$ pour tout j, donc $r_{i,j}$ est nul dès que $i > j$, la matrice R est donc triangulaire supérieure. D'autre part, $r_{i,j}$ est la i-ième coordonnée du vecteur x_j dans la base orthonormale $\mathcal{E}$, donc $r_{i,j} = (e_i|x_j)$. La condition **(C3)** montre donc que les coefficients diagonaux $r_{i,i}$ de R sont strictement positifs. Notons que $\det(R) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} r_{i,i} > 0$, donc les bases $\mathcal{X}$ et $\mathcal{E}$ sont "de même sens", nous y reviendrons.

VI. Formes linéaires sur un espace euclidien.

1. Théorème de représentation de Riesz.

__**Théorème.**__ **Soit φ une forme linéaire sur un espace euclidien E. Alors il existe un unique vecteur a de E tel que**

$$\forall x \in E \qquad \varphi(x) = (a|x) \ .$$

Preuve. Pour tout $a \in E$, soit $\varphi_a : E \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto (a|x)$. De la linéarité à droite du produit scalaire, il résulte que φ_a est une forme linéaire sur E, autrement dit φ_a appartient à $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ espace dual de E. Considérons maintenant l'application $\Phi : \begin{cases} E \to E^* \\ a \mapsto \varphi_a \end{cases}$. Il résulte maintenant de la linéarité à gauche du produit scalaire que Φ est une application linéaire. Elle est injective car, si $a \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors φ_a est la forme linéaire nulle, et en particulier $\varphi_a(a) = \|a\|^2 = 0$ donc $a = 0_E$. Comme Φ est linéaire et injective entre deux espaces vectoriels de même dimension finie, elle est donc bijective, c'est un isomorphisme, on a donc

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists! a \in E \qquad \varphi = \Phi(a) = \varphi_a \ ,$$

et c'est ce que dit l'énoncé du théorème de Riesz.

2. Hyperplans d'un espace euclidien. Vecteur normal.

Si H est un hyperplan d'un espace euclidien E, alors $D = H^\perp$ est une droite vectorielle. Tout vecteur **non nul** a de D est appelé **vecteur normal** à l'hyperplan H. On a alors $H = D^\perp = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^\perp$, et $H = \mathrm{Ker}(\varphi_a)$, où φ_a est la forme linéaire $x \mapsto (a|x)$ mentionnée dans le paragraphe précédent. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de E, si $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i e_i$ est un vecteur normal à H, alors une équation cartésienne de l'hyperplan H relativement à la base $\mathcal{B}$ est: $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$, qui traduit l'orthogonalité des vecteurs a et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$.

3. Distance d'un vecteur à un hyperplan, à une droite.

Soit H un hyperplan de E euclidien, soit a un vecteur normal à H, soit $x \in E$. On a alors $d(x, H) = \big\|x - p_H(x)\big\|$. Or, le vecteur $x - p_H(x)$ est orthogonal (ou "normal") à l'hyperplan H, il est donc colinéaire à a: il existe λ réel tel que $x - p_H(x) = \lambda a$. Ce réel λ est déterminé par le fait que $x + \lambda a = p_H(x)$ appartient à H, donc $(a \mid x + \lambda a) = 0$, donc $\lambda = -\dfrac{(a|x)}{\|a\|^2}$.

On a donc $p_H(x) = x - \dfrac{(a|x)}{\|a\|^2}\, a$, et enfin

$$\boxed{d(x, H) = \big\|x - p_H(x)\big\| = \frac{\big|(a|x)\big|}{\|a\|}\ , \qquad \text{avec } a \text{ vecteur normal à } H.}$$

Remarque. On peut retrouver l'expression de $p_H(x)$ en observant que $p_H(x) = x - p_D(x)$, et le projeté orthogonal de x sur D s'exprime par $p_D(x) = \left(\dfrac{a}{\|a\|} \;\middle|\; x\right) \dfrac{a}{\|a\|} = \dfrac{(a|x)}{\|a\|^2}\, a$, puisque $\left(\dfrac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormale de la droite D. Donc

$$\boxed{p_H(x) = x - \frac{(a|x)}{\|a\|^2}\, a\ .}$$

Puis, par la relation de Pythagore, $d(x, D)^2 = \|x\|^2 - d(x, H)^2 = \|x\|^2 - \dfrac{(a|x)^2}{\|a\|^2}$.

Si l'hyperplan H a pour équation cartésienne $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, si $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $a = \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i e_i$ est un vecteur normal à H, et on obtient

$$d(x, H) = \frac{|a_1x_1 + \cdots + a_nx_n|}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}}\ .$$