DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 5
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

EXERCICE

1. Je pense qu'il fallait ici se contenter de rappeler qu'une fonction développable en série entière est toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$. En effet, si on commence à rentrer dans des considérations sur le théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions, il y a un risque énorme de raconter des bêtises, comme par exemple que la somme d'une série entière de rayon de convergence R converge normalement sur $]-R,R[$, ce qui est faux.

2. Question calculatoire, mais plutôt bien traitée.

3. On attendait de vous que vous alliez jusqu'au bout de la question, c'est-à-dire que vous donniez l'expression

$$\forall x \in\,]-1,1[\qquad f(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = a_1\,\frac{x}{1-x}\ .$$

6. Pas mal d'erreurs dans cette résolution d'équation différentielle (oubli de constantes arbitraires par exemple). C'est peut-être un (petit) chapitre à travailler!

7. Que veut dire "développer" ?

8. L'équivalent $g_\lambda(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} -\dfrac{2\lambda+1}{2t}$ n'est valable que si $2\lambda+1$ est non nul, il est donc **nécessaire** que $2\lambda+1$ soit nul pour que l'on puisse prolonger g_λ par continuité au point 1. Mais est-ce **suffisant** ? Pour cela, il faudrait regarder quels sont les termes qui restent lorsque $2\lambda+1$ est nul, ce que quasiment personne n'a fait!

9. Question un peu technique, nécessitant d'abord un décalage de la variable (poser $x = 1+t$), puis le développement en série entière de $\dfrac{\ln(1+t)}{t}$, cette question n'a pas eu beaucoup de succès!

10. Question très technique, et qui n'a été abordée sur aucune copie, ce qui ne m'a guère surpris.

PROBLÈME

2. Apprendre la formule de Taylor avec reste intégral!

4. De bonnes réponses très souvent pour justifier l'existence du maximum M et l'inégalité **stricte** $M < e^{-1}$, mais très peu d'entre vous ont su l'exploiter correctement dans la suite de la question! Il fallait utiliser ici la question **3.** avec $y = M$.

Noter que, si l'on prend $y = e^{-1}$, la suite de terme général $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!}\,e^{-n}$ **ne tend pas vers zéro!** (appliquer la formule de Stirling pour vous en persuader!). Il fallait donc être subtil et majorer ue^{-u}, non pas par e^{-1}, mais par un réel strictement inférieur à e^{-1}, comme l'énoncé le suggère... et surtout ne pas tenter d'invoquer un mystérieux résultat de croissances comparées (*pipeau, pipeau*!) pour affirmer un résultat qui est en fait faux.

Attention aussi à bien gérer les relations de comparaison asymptotique et à ne pas laisser croire que, si $u_n = x_n + y_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, cela signifie que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, ce serait du plus mauvais effet... *Contre-exemple avec* $x_n = \dfrac{1}{n^2}$ *et* $y_n = \dfrac{1}{n}$.

7. Encore une question où il est pertinent d'utiliser le résultat obtenu en **Q3.** L'invocation d'un mystérieux résultat de croissances comparées n'est ici aussi que... *pipeau, pipeau*!

8. L'étude de g et l'étude de h font appel à deux théorèmes différents:

- dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre pour g ;
- théorème fondamental de l'analyse pour h.

Il faut donc maîtriser son cours et prendre le temps d'identifier les situations respectives.

Il y a beaucoup trop d'erreurs de rédaction dans l'étude de g: parfois une confusion des variables x et t, parfois une étude d'intégrabilité en $+\infty$ alors que l'on est censé intégrer sur $[0,1]$, parfois une domination de f alors que c'est sa dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ qu'il faut ici dominer. Il va donc falloir pratiquer ces théorèmes!

Quant au théorème fondamental, il devrait maintenant être mieux connu et reconnu (savoir identifier les situations où il est pertinent d'y faire référence!).

10. à 14. Toute cette partie III, un peu technique, et demandant une bonne pratique du calcul asymptotique (ici utilisation de développements limités en 0 par la formule de Taylor-Young) n'a été abordée de façon significative que dans de très rares copies...

16. Attention à rédiger convenablement le passage de $R_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^n$ à $T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}e^n$.

Pour cela, il est recommandé de passer par l'écriture $R_n(1) = \dfrac{1}{2}e^n + o(e^n)$.

17. Des réponses souvent décalées pour l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X, ce sont les entiers de 2 à $n+1$ (pour tirer une boule déjà tirée, il faut tirer au moins deux fois!!!).