

Calcul intégral

Théorème de convergence dominée.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Théorèmes de continuité et de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Extension aux fonctions de classe C^k . Adaptation des théorèmes au cas où la condition de domination est vérifiée sur tout segment.

Théorème d'intégration terme à terme.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Espaces préhilbertiens, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

(cf. programme précédent).

Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Toute forme linéaire sur un espace euclidien est de la forme $x \mapsto (a|x)$. Vecteur normal à un hyperplan. Distance d'un vecteur à un hyperplan, à une droite. Expression de l'image d'un vecteur par une réflexion.

Isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) d'un espace euclidien. Caractérisations: conservation du produit scalaire, image d'une base orthonormale. Groupe orthogonal $O(E)$.

Matrices orthogonales. Définition par $A^T A = I_n$. Caractérisations utilisant les lignes ou les colonnes. Utilisations comme matrices de passage entre deux bases orthonormales d'un espace euclidien, comme matrices représentant une isométrie vectorielle dans un espace euclidien rapporté à une base orthonormale. Groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$, groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien. Définition, propriétés élémentaires, espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$. Représentation par une matrice symétrique dans une base orthonormale.

Pas encore de théorème spectral.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité. Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.
- Montrer qu'une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.
- Montrer que, si V est de dimension finie dans E préhilbertien, alors $V \oplus V^\perp = E$ et $(V^\perp)^\perp = V$. Expression du projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur V . Distance de x à V .
- Description (algorithmique et géométrique) du procédé de Gram-Schmidt.
- Problème de la régression linéaire (droite des moindres carrés), interprétation en termes de projection orthogonale sur un s.e.v.
- Dans E euclidien, expression de la réflexion d'hyperplan $H = (\text{Vect}(a))^\perp$, expression de la distance d'un vecteur x à cet hyperplan.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal