CORRIGÉ du DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 7
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1: Étude de la transformation de Laplace

d'après Centrale PSI 2012

PARTIE A - Généralités

A.1. La convergence absolue (intégrabilité) entraînant la convergence, on a l'inclusion $I_f \subset J_f$.

A.2. Il suffit de montrer la proposition suivante:

$$\forall a \in \mathbb{R} \qquad a \in I_f \Longrightarrow [a, +\infty[\subset I_f \ .$$

Soit donc a appartenant à I_f, supposé non vide. La fonction g_a définie par $g_a(t) = f(t)\, e^{-at}$ est alors intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Si on prend $b \in [a, +\infty[$, alors la fonction $g_b : t \mapsto f(t)\, e^{-bt}$ vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \big|g_b(t)\big| \leq \big|g_a(t)\big|$, elle est majorée en valeur absolue par une fonction intégrable, elle est donc aussi intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $b \in I_f$. On a donc prouvé que $[a, +\infty[\subset I_f$.

L'ensemble I_f est donc de l'une des formes suivantes: $\emptyset$, $\mathbb{R}$, $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$ avec a réel.

A.3. Il suffit de montrer que Lf est continue sur tout segment de I_f. Soit donc $S = [a, b]$ un segment inclus dans I_f. Posons $g(x, t) = f(t)\, e^{-xt}$ pour $(x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+$. La fonction g est continue sur $S \times \mathbb{R}_+$ (ce qui entraîne la continuité par rapport à x et la continuité par morceaux par rapport à t), on a la domination

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+ \qquad \big|g(x, t)\big| \leq \big|f(t)\big|\, e^{-at} \ ,$$

la fonction $t \mapsto \big|f(t)\big|\, e^{-at}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (puisque $a \in I_f$). Le théorème de continuité des intégrales à paramètre s'applique donc et garantit la continuité de la fonction Lf sur S. On en déduit la continuité de Lf sur I_f.

A.4. Lorsque f est positive, on a $f(t)e^{-xt} \geq 0$ pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$. La convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t$ équivaut alors à l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)\, e^{-xt}$. On a donc $J_f = I_f$ dans ce cas.

PARTIE B - Étude d'un exemple

B.1. Il est connu que $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, on a donc aussi $\displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$, puis $\displaystyle\lim_{t \to 0} f(t) = 0$. En posant $f(0) = 0$, on a ainsi une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

B.2. L'intégrabilité de $t \mapsto f(t)\, e^{-xt}$ sur $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ dépend seulement du comportement asymptotique de cette fonction au voisinage de $+\infty$. Or, $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t}{2}$, donc $f(t)\, e^{-xt} \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{t}{2} e^{-xt}$. La fonction $h_x : t \mapsto \dfrac{t}{2} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x > 0$ (en effet, si $x > 0$, on a $t^2 h_x(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, ce qui garantit l'intégrabilité, tandis que si $x \leq 0$, on a $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} h_x(t) = +\infty$ d'où la non-intégrabilité). On en déduit que $I_f = \mathbb{R}_+^*$.

B.3. Pour $t > 0$, écrivons:

$$\frac{t}{e^t - 1} = t\, e^{-t}\, \frac{1}{1 - e^{-t}} = t\, e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{-t}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} t\, e^{-nt} \ .$$

Si on fixe $x > 0$, on a alors

$$\begin{aligned}
(Lf)(x) \quad &= \quad -\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} t\, e^{-(x+n)t} \Big)\, \mathrm{d}t \\
&= \quad -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \int_0^{+\infty} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \Big)\, \mathrm{d}t \ ,
\end{aligned}$$

en posant $g_n(t) = t\, e^{-(x+n)t}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Les fonctions g_n sont continues et intégrables (puisque $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 g_n(t) = 0$) sur $\mathbb{R}_+$. Par construction, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et a pour somme la fonction continue $s : t \mapsto \dfrac{t\, e^{-xt}}{e^t - 1}$ (prolongée par continuité en 0). Enfin,

$$\int_{\mathbb{R}_+} |g_n| = \int_{\mathbb{R}_+} g_n = \int_0^{+\infty} t\, e^{-(x+n)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(x+n)^2}$$

est le terme général d'une série convergente. Le théorème d'intégration terme à terme s'applique, et donne $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} s = \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} g_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}_+} g_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$, puis l'expression demandée pour $(Lf)(x)$.

B.4. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, posons maintenant $u_n(x) = \dfrac{1}{(x+n)^2}$, alors les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}_+$ et la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ puisque $\|u_n\|_\infty = u_n(0) = \dfrac{1}{n^2}$ (terme général d'une série convergente), donc la fonction somme $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{x\to 0} S(x) = S(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, ce qui s'écrit aussi $S(x) = \dfrac{\pi^2}{6} + o(1)$ lorsque $x \to 0$. De **B.3.**, on déduit donc, lorsque x tend vers zéro, le développement asymptotique (chacun des termes doit être négligeable devant ceux qui précèdent):

$$(Lf)(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \frac{\pi^2}{6} + o(1)\ .$$

C - Dérivation

C.1. Il suffit de montrer que, si un réel a appartient à I_f, alors Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, +\infty[$, ou encore qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout segment $[c, d]$ inclus dans $]a, +\infty[$. Soit donc $S = [c, d]$ un tel segment. Posons $g(x, t) = f(t)\, e^{-xt}$ pour $(x, t) \in S \times \mathbb{R}_+$. Alors g est continue par rapport à la variable t, de classe $\mathcal{C}^\infty$ par rapport à la variable x, les dérivées partielles successives $\dfrac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t) = (-1)^n t^n\, f(t)\, e^{-xt}$ étant continues par morceaux par rapport à t. On a, de plus, la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall (x, t) \in [c, d] \times \mathbb{R}_+ \qquad \left|\frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, t)\right| = t^n\, \big|f(t)\big|\, e^{-xt} \leq t^n\, \big|f(t)\big|\, e^{-ct}\ ,$$

la fonction $u_n : t \mapsto t^n \big|f(t)\big| e^{-ct}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$: en effet, comme $a \in I_f$, la fonction $v : t \mapsto \big|f(t)\big| e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et u_n est négligeable devant v au voisinage de $+\infty$ puisque $u_n(t) = t^n\, e^{-(c-a)t}\, v(t)$ avec $t^n\, e^{-(c-a)t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. On peut donc affirmer que la fonction Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[c, d]$, donc sur $]a, +\infty[$, donc sur $\overset{\circ}{I}_f$, avec

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \overset{\circ}{I}_f \qquad (Lf)^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (-1)^n\, t^n\, f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = (Lg_n)(x)\ ,$$

en posant $g_n(t) = (-1)^n\, t^n\, f(t)$.

C.2. La fonction $t \mapsto f(t)\, e^{-xt} = t^n\, e^{-(x+a)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x + a > 0$ (étude déjà plus ou moins faite dans les questions **B.2.** et **B.3.**), donc $I_f\ =]-a, +\infty[$. Et $J_f = I_f$ d'après **A.4.**

Si, pour $x > -a$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\, e^{-(x+a)t}\, \mathrm{d}t$, on a $I_0 = \dfrac{1}{x+a}$ et, par une hipépé, $I_{n+1} = \dfrac{n+1}{x+a}\, I_n$, on en déduit que $I_n = \dfrac{n!}{(x+a)^n}\, I_0 = \dfrac{n!}{(x+a)^{n+1}}$. Autrement dit,

$$\forall x \in I_f =]-a, +\infty[\qquad (Lf)(x) = \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}\ .$$

PARTIE D - Injectivité de la transformation de Laplace

D.1. On a $0 \in E$ et, si $f \in E$, $g \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha f + g$ est continue et il existe des entiers naturels m et n tels que $f(t) = O(t^m)$ et $g(t) = O(t^n)$ au voisinage de $+\infty$. En posant $k = \max\{m, n\}$, f et g sont toutes deux $O(t^k)$, puis $(\alpha f + g)(t) = O(t^k)$ donc $\alpha f + g \in E$.

D.2. Plus ou moins déjà fait dans la question **C.2.**

D.3. Si $f \in E$, alors Lf est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'après **C.1.** Enfin, L est linéaire par linéarité de l'intégrale.

D.4.a. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+$, et même de classe $\mathcal{C}^1$ avec $g'(t) = f(t)\, e^{-t}$, et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} g(t) = \int_0^{+\infty} f(s)\, e^{-s}\, \mathrm{d}s = (Lf)(1)$. Donc $g(t) = O(1)$ en $+\infty$, et $g \in E$.

b. Pour $x > 0$, on a donc $x \in I_g$ et, par une intégration par parties, avec $g(0) = 0$, on trouve

$$(Lg)(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{x}\, e^{-xt}\, g(t)\right]_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-(x+1)t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,(Lf)(x+1)$$

(le terme entre crochets étant nul).

c. Comme composée de fonctions continues, h est continue sur $]0, 1]$. Puis

$$\lim_{u\to0^+} h(u) = \lim_{u\to0^+} g(-\ln u) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = (Lf)(1) = h(0)\ ,$$

donc h est continue en 0. Le changement de variable $t = -\ln u$, donc $u = e^{-t}$, donne

$$(Lg)(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t = \int_1^0 g(-\ln u)\, u^x\, \frac{-\mathrm{d}u}{u} = \int_0^1 u^{x-1}\, h(u)\, \mathrm{d}u\ .$$

D.5.a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 u^n\, h(u)\, \mathrm{d}u = (Lg)(n+1) = \frac{1}{n+1}\,(Lf)(n+2) = 0$.

b. Du **a.**, on déduit aisément (par combinaisons linéaires) que, pour tout polynôme P, on a $\displaystyle\int_0^1 P(u)\, h(u)\, \mathrm{d}u = 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n)

de fonctions polynomiales telle que (P_n) converge uniformément vers h sur $[0,1]$. Alors la suite de fonctions continues (hP_n) converge uniformément vers h^2 sur $[0,1]$ puisque

$$\|hP_n - h^2\|_\infty = \|h(P_n - h)\|_\infty \leq \|h\|_\infty \, \|P_n - h\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ .$$

Et comme $\displaystyle\int_0^1 h(u)\,P_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$ pour tout n, on a, par interversion limite-intégrale (justifiée par la convergence uniforme sur un segment) $\displaystyle\int_0^1 h(u)^2\,\mathrm{d}u = 0$. Le théorème de stricte positivité donne enfin $h^2 = 0$, soit $h = 0$ sur $[0,1]$.

c. Si h est nulle sur $[0,1]$, on déduit de la définition de h que g est nulle sur $\mathbb{R}_+$ puis, en dérivant, que $f(t)\,e^{-t}$ est nul pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc f est nulle sur $\mathbb{R}_+$. On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$, donc la transformation de Laplace L est injective sur l'espace vectoriel E. Cela justifie la lecture inversée du tableau des transformées de Laplace que vous pratiquez en SII depuis longtemps!

PROBLÈME 2

d'après CCP, 2018, filière PC

PARTIE A.

Les polynômes L_n sont appelés **polynômes de Legendre**.

1. On a $U_0 = 1$ donc $L_0 = 1$, puis $U_1 = X^2 - 1$ donc $L_1 = X$. Ensuite, $U_2 = (X^2-1)^2$ et

$$L_2 = \frac{1}{8}\,U_2'' = \frac{1}{2}\,(3X^2 - 1)\ .$$

2. Le polynôme U_n est de degré $2n$, et chaque dérivation abaisse le degré d'une unité, donc $\deg(L_n) = n$ pour tout n. Le coefficient dominant de L_n est

$$a_n = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{2^n\,n!} = \frac{(2n)!}{2^n\,(n!)^2}\ .$$

3. Les polynômes L_k sont étagés en degrés, donc $(L_0,\cdots,L_n)$ est une famille libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Son cardinal est égal à la dimension $(n+1)$ de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base.

4. La linéarité de φ est immédiate.

5. Si $\deg(P) \leq n$, alors clairement $\deg\big(\varphi(P)\big) \leq n$, donc le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ.

6. On calcule les $\varphi_n(X^k) = \varphi(X^k)$ pour k de 0 à n: d'abord, $\varphi(X^0) = \varphi(1) = 0$, puis $\varphi(X) = 2X$ puis, pour $k \geq 2$,

$$\varphi(X^k) = (X^2-1)\,k(k-1)X^{k-2} + 2X\,kX^{k-1} = k(k+1)\,X^k - k(k-1)\,X^{k-2}\ .$$

Donc, si $\mathcal{B}_n = (1, X, \cdots, X^n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$M_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(\varphi_n) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & & (0) \\ & 2 & 0 & -6 & & \\ & & 6 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -n(n-1) \\ & & & & \ddots & 0 \\ (0) & & & & & n(n+1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \ .$$

7. La matrice M_n est triangulaire supérieure. On observe alors que

$$\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \mathrm{Sp}(M_n) = \big\{0, 2, 6, \cdots, n(n+1)\big\} = \big\{k(k+1) \ ; \ 0 \leq k \leq n\big\} \ .$$

Comme φ_n admet $n+1$ valeurs propres distinctes, avec $\dim\big(\mathbb{R}_n[X]\big) = n+1$, on conclut que φ_n est diagonalisable.

8. Calcul banal, laissé au lecteur.

9. Par la formule de Leibniz,

$$(X\,U_k)^{(k+1)} = \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \, X^{(j)}\, U_k^{(k+1-j)} = X\,U_k^{(k+1)} + (k+1)\,U_k^{(k)}$$

puisque les dérivées d'ordre ≥ 2 du polynôme X sont nulles. Par un calcul semblable,

$$\begin{aligned} \big((X^2-1)\,U_k'\big)^{(k+1)} &= \sum_{j=0}^{k+1} \binom{k+1}{j} \, (X^2-1)^{(j)}\, U_k^{(k+2-j)} \\ &= (X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + 2(k+1)\,X\,U_k^{(k+1)} + k(k+1)\,U_k^{(k)} \ . \end{aligned}$$

Après regroupement des termes et simplification, en dérivant $k+1$ fois la relation obtenue à la question précédente, on obtient

$$(X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + 2X\,U_k^{(k+1)} - k(k+1)\,U_k^{(k)} = 0 \ .$$

10. On calcule. Zou, c'est parti!

$$\begin{aligned} \varphi_n(L_k) &= (X^2-1)\,L_k'' + 2X\,L_k' \\ &= \frac{1}{2^k\,k!}\Big((X^2-1)\,U_k^{(k+2)} + 2X\,U_k^{(k+1)}\Big) \\ &= \frac{1}{2^k\,k!}\,k(k+1)\,U_k^{(k)} \ = \ k(k+1)\,L_k \ . \end{aligned}$$

Donc L_k est vecteur propre de φ_n pour la valeur propre $k(k+1)$.

11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{Sp}(\varphi_n) = \big\{k(k+1) \ ; \ 0 \leq k \leq n\big\}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le sous-espace propre associé $E_{k(k+1)}(\varphi_n)$ est la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(L_k)$.

12. Soit V l'ensemble des valeurs propres de φ. Clairement, $\mathrm{Sp}(\varphi_n) \subset V$ pour tout n, donc l'ensemble V (*qu'il serait incorrect d'appeler spectre car on est en dimension infinie*) contient $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \big\{k(k+1) \ ; \ k \in \mathbb{N}\big\}$. Réciproquement, si $\lambda \in V$, si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un vecteur propre associé ($P \neq 0$ et $\varphi(P) = \lambda P$), alors P a un certain degré d et on a $\varphi_d(P) = \lambda P$, donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(\varphi_d)$. En conclusion, $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Sp}(\varphi_n) = \big\{k(k+1)\ ;\ k \in \mathbb{N}\big\}$.

Pour tout k entier naturel, $E_{k(k+1)}(\varphi) = \mathrm{Vect}(L_k)$.

PARTIE B.

13. On reconnaît dans l'expression de $\varphi(P)(t)$ la dérivée d'un produit, une hipépé donne donc

$$\big(\varphi(P)|Q\big) = \int_{-1}^{1} \big((t^2-1)\,P''(t) + 2t\,P'(t)\big)\,Q(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1} (t^2-1)\,P'(t)\,Q'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Le "terme entre crochets, qui est nul, n'a pas été écrit. Comme on obtient une expression faisant jouer à P et Q des rôles symétriques, ceci est aussi égal à $\big(P|\varphi(Q)\big)$. Ainsi, φ est un endomorphisme symétrique de l'espace préhilbertien $\big(E,(\cdot|\cdot)\big)$.

14. Si m et n sont deux entiers naturels distincts, on a

$$\big(\varphi(L_m)|L_n\big) = \big(m(m+1)L_m|L_n\big) = m(m+1)\,(L_m|L_n)\ ,$$

mézôssi, "par symétrie",

$$\big(\varphi(L_m)|L_n\big) = \big(L_m|\varphi(L_n)\big) = \big(L_m|n(n+1)L_n\big) = n(n+1)\,(L_m|L_n)\ .$$

Comme $m(m+1) \neq n(n+1)$, en comparant les deux expressions, on a $(L_m|L_n) = 0$.

Remarque. Si on pose $Q_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|_2}$, la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une famille orthonormale dans $\mathbb{R}[X]$ et, plus précisément, puisque chaque Q_k est de degré k, on peut affirmer que, pour tout n, $(Q_0,\cdots,Q_n)$ est une base orthonormale du sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

15. C'est du cours. Le polynôme T_n considéré est le projeté orthogonal de f sur le sous-espace de dimension finie $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, si Q est un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $f - T_n \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$, $T_n - Q \in \mathbb{R}_n[X]$, ces deux polynômes sont donc orthogonaux et la relation de Pythagore donne

$$\|f-Q\|_2^2 = \big\|(f-T_n)+(T_n-Q)\big\|_2^2 = \|f-T_n\|_2^2 + \|T_n-Q\|_2^2 \geq \|f-T_n\|_2^2\ ,$$

l'égalité ayant lieu si et seulement si $Q = T_n$ (d'où l'unicité du polynôme T_n recherché).

16. Toujours d'après le cours, le polynôme T_n se décompose dans la base orthonormale $(Q_0,\cdots,Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en $T_n = \sum_{k=0}^{n}(Q_k|f)\,Q_k = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)\,Q_k$. Donc $\|T_n\|_2^2 = \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2$ et, toujours par Pythagore (puisque $T_n \in \mathbb{R}_n[X]$ et $f - T_n \in \big(\mathbb{R}_n[X]\big)^{\perp}$):

$$d_2\big(f,\mathbb{R}_n[X]\big)^2 = \|f-T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|T_n\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2\ .$$

17. On déduit de cela que, pour tout n entier naturel, $\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$. La série $\sum c_k(f)^2$ converge donc (série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées) et, en faisant tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2$.

18. Soit $f \in E$, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_k) de polynômes telle que $\lim_{k \to +\infty} \|f - P_k\|_\infty = 0$. Il existe donc au moins un entier K pour lequel $\|f - P_K\|_\infty \leq \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Alors $\|f - P_K\|_2 \leq \varepsilon$. *Il est en effet facile de voir que, pour tout $g \in E$, on a $\|g\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|g\|_\infty$*. Si N est le degré de ce polynôme P_K, comme $P_K \in \mathbb{R}_N[X]$, on a

$$d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) = \min_{Q \in \mathbb{R}_N[X]} \|f - Q\|_2 \leq \|f - P_K\|_2 \leq \varepsilon\ .$$

19. En reprenant les notations de la question **18.**, pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré l'existence d'un entier N tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} c_k(f)^2 \geq \|f\|_2^2 - \varepsilon^2$. La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs étant croissante, on aura alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \geq \|f\|_2^2 - \varepsilon^2$ pour tout $n \geq N$. Si $f \in E$ est donné, on a ainsi prouvé

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geq N \Longrightarrow \|f\|_2^2 - \varepsilon^2 \leq \sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2 \leq \|f\|_2^2\ ,$$

on en déduit que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} c_k(f)^2\Big) = \|f\|_2^2$, soit la relation de Parseval.

20. Si $f \in E$ et $g \in E$, on a

$$\begin{aligned}
4\,(f|g) &= \|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f+g)^2 - \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f-g)^2 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[(Q_k|f+g)^2 - (Q_k|f-g)^2\Big] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 4\,(Q_k|f)\,(Q_k|g) \\
&= 4 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(f)\,c_k(g)\ .
\end{aligned}$$