COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 16 : du 05/02 au 09/02

Calcul intégral (révisions)

cf. programme précédent.

Espaces préhilbertiens et euclidiens

Espaces préhilbertiens, projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, formes linéaires et hyperplans dans un espace euclidien, isométries vectorielles d'un espace euclidien et matrices orthogonales, *cf.* programme précédent. *Les isométries en dimensions* 2 *et* 3 *n'ont pas été étudiées.*

Endomorphismes autoadjoints (ou symétriques) d'un espace euclidien. Définition, propriétés élémentaires, espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$. Représentation par une matrice symétrique dans une base orthonormale.

Théorème spectral:

- Tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable dans une base orthonormale (il existe une b.o.n. de vecteurs propres, ou encore E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres) ;
- Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.

Matrices symétriques positives, définies positives. Caractérisation par le spectre.

Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Description (algorithmique et géométrique) du procédé de Gram-Schmidt.
- Problème de la régression linéaire (droite des moindres carrés), interprétation en termes de projection orthogonale sur un s.e.v.
- Dans E euclidien, expression de la réflexion d'hyperplan $H = \big(\mathrm{Vect}(a)\big)^{\perp}$, expression de la distance d'un vecteur x à cet hyperplan.
- Caractérisation des isométries par la conservation du produit scalaire, par la conservation des bases orthonormales.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.