DEVOIR de MATHÉMATIQUES numéro 7
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

PROBLÈME 1

A.1. Il suffit ici de dire que toute intégrale absolument convergente est convergente, pour avoir l'inclusion $I_f \subset J_f$. Malgré les conseils de rédaction que j'ai maintes fois répétés au sujet de la convergence des séries et des intégrales, j'ai encore vu certains d'entre vous majorer une intégrale pour montrer qu'elle converge!!! *Je reconnais que, dans le cadre des intégrales de fonctions* **positives**, *cela peut avoir du sens, et votre programme autorise à procéder ainsi pour montrer la sommabilité d'une famille* **de réels positifs**. *En revanche, si la fonction n'est pas positive, il est aberrant de vouloir majorer une intégrale avant de s'être assuré de son existence.*

A.2. Quelques raisonnements par l'absurde, ce qui d'une part est un peu "tordu", et d'autre part pas toujours exact car la négation de "I_f est un intervalle non majoré" n'est pas "I_f est un intervalle majoré".

A.3. Question souvent bien traitée. Toutefois, il y a quelques erreurs pour la domination: la borne inférieure m de l'intervalle I_f n'existe pas toujours (si $I_f = \mathbb{R}$), et si elle existe elle n'appartient pas forcément à I_f (si I_f est de la forme $]m, +\infty[$ avec m réel).

A.4 Question triviale... qui, sur certaines copies, remplit quand même une demi-page!!!

B.1. QUE D'ERREURS DE MÉTHODE DANS LES CALCULS ASYMPTOTIQUES!!! Sur de nombreuses copies, on voit des développements asymptotiques sans reste (**bouh, c'est pas beau!!!**) ou des erreurs de manipulation des équivalents!!!

Un petit rappel donc: Pour obtenir un équivalent d'un produit (ou d'un quotient), on peut remplacer chaque facteur (ou bien le numérateur et le dénominateur) par un équivalent: on peut dire d'une certaine façon que les équivalents sont "compatibles" avec la multiplication et la division. **En revanche, ils ne sont pas "compatibles" avec l'addition et la soustraction!**

Dans l'exemple proposé ici, il est exact d'écrire $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$, et pourquoi pas aussi que $\dfrac{t}{e^t-1} \underset{t\to 0}{\sim} 1$, il est faux d'en déduire que $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$. Un calcul plus poussé (mais qui n'était pas nécessaire pour traiter ce sujet) montre en effet que $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t^2}{12}$. **Je vous recommande vivement, à toutes et à tous, d'essayer de mener à bien ce calcul!**

B.2 Des choses très bizarres vues sur certaines copies, comme $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \dfrac{t}{t} - 1$ (?). La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0 ne peut pas s'exprimer en fonction de t (*bon d'accord, ici les t peuvent se simplifier, mais ce n'est pas une raison!*).

B.3. Une application du théorème d'intégration terme à terme vu récemment, en général plutôt bien traitée.

B.4. Un argument de convergence normale (ou uniforme) est ici nécessaire pour intervertir somme et limite en 0. J'ai vu quelques développements asymptotiques très exotiques, je décerne le premier prix à celle ou celui qui m'a écrit $(Lf)(x) = \infty + o(1)$!!!

C.1. La domination est assez délicate à écrire, elle est correcte dans assez peu de copies. En effet, le fait qu'un réel a appartienne à I_f entraîne l'intégrabilité de $t \mapsto f(t)e^{-at}$, mais pas a priori celle de $t \mapsto t^n f(t) e^{-at}$.

PROBLÈME 2

3. Il est écrit dans le programme de PCSI que toute famille de polynômes de degrés distincts est libre, il est donc inutile d'en écrire une démonstration.

11. "Préciser les éléments propres" signifie: donner la liste des valeurs propres et, pour chaque valeur propre, **préciser le sous-espace propre** (SEP) associé. Si les valeurs propres ont été généralement bien précisées, on ne peut pas en dire autant des SEP. Il ne suffit pas de dire que L_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $k(k+1)$, mais il faut préciser que le SEP est de dimension 1, i.e. $E_{k(k+1)}(\varphi_n) = \text{Vect}(L_k)$.

12. Mêmes remarques qu'en **Q11.** Et comment passer de la dimension finie ($\mathbb{R}_n[X]$) à la dimension infinie ($\mathbb{R}[X]$) ? Un minimum de rédaction était ici nécessaire. Et mentionner un "passage à la limite" était particulièrement fumeux!

13. L'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ étant de dimension infinie (préhilbertien), il est toujours possible de parler d'endomorphisme "symétrique" ("autoadjoint" est plus critiquable car l'adjoint n'existe pas toujours, mais on est là bien au-dela du programme). En revanche, il n'est plus question dans ce cadre de mentionner un quelconque théorème spectral (*bon, cela existe, dans des espaces de Hilbert, mais c'est une autre histoire...*).

15. C'est plus ou moins une question de cours, mais je pense que cela méritait d'être développé un peu.

17. Je rappelle que **"passer à la limite" dans une inégalité n'est autorisé qu'une fois que l'on s'est assuré de l'existence des limites des différents termes**. Je pense qu'il était donc ici impératif de commencer la rédaction par: " $\sum c_k(f)^2$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées, elle est donc convergente".

18. Question assez délicate, et souvent rédigée à la va-vite. En effet, il faut prendre garde à deux choses:

- la convergence uniforme est une convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et on a besoin ici de majorer une norme $\|\cdot\|_2$. Quel lien y a-t-il entre ces deux normes sur E ? Sont-elles équivalentes ? *Réponse: non, elles ne sont pas équivalentes, mais on a tout de même l'inégalité facile* $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|\cdot\|_\infty$*, qui est ici suffisante.*

- si une suite (P_n) de polynômes converge uniformément vers f, que sait-on du degré du polynôme P_n ? *Réponse: rien!* Si, par exemple, $\|P_n - f\|_2 \leq \varepsilon$, c'est en posant $N = \deg(P_n)$ que l'on peut affirmer que $d_2\big(f, \mathbb{R}_N[X]\big) \leq \varepsilon$. Les entiers n et N sont donc a priori différents.

Enfin, la suite de polynômes (P_n) qui converge uniformément vers f sur $[-1, 1]$ n'a aucun lien a priori avec les polynômes T_n de la question **15.**