Semaine 17 : du 26/02 au 01/03

Endomorphismes des espaces euclidiens

Isométries vectorielles et endomorphismes autoadjoints de E euclidien, notamment théorème spectral et endomorphismes autoadjoints positifs et définis positifs. Matrices orthogonales. Réduction des matrices symétriques réelles, matrices positives et définies positives. (*cf.* programmes précédents)

Les isométries en dimensions 2 *et* 3 *n'ont pas été étudiées.*

Probabilités

Familles sommables d'éléments de $[0, +\infty]$, puis de nombres réels ou complexes. *Je me contente pour cela de vous renvoyer à l'extrait du programme officiel qui est joint à mon mail. Aucun exercice spécifiquement sur les familles sommables ne doit être proposé, il ne s'agit en effet que d'un outil à utiliser dans le contexte des démonstrations de cours et des résolutions d'exercices de probabilités.*

Notion de tribu sur un univers Ω, espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. Notion de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Distribution de probabilités sur un ensemble au plus dénombrable.

Propriétés de continuité monotone, de sous-additivité.

Événements presque sûrs, événements négligeables, systèmes quasi-complets d'événements.

Probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes. Événements indépendants (familles finies).

Notion de variable aléatoire discrète (*les seules au programme*), loi d'une telle variable aléatoire.

Loi géométrique. Définition. Interprétation comme "temps d'attente d'un succès".

Loi de Poisson. Interprétation comme "loi des événements rares".

Couples ou n-uplets de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement (de probabilité non nulle).

Variables aléatoires indépendantes (familles finies). Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, extension au cas de n variables. Lemme des coalitions.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Caractérisation des isométries par la conservation du produit scalaire, par la conservation des bases orthonormales.
- Un projecteur est autoadjoint si et seulement si c'est un projecteur orthogonal.
- Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs. Caractérisation par le spectre.
- Propriété de sous-additivité d'une probabilité.
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation comme loi des événements rares: "loi-limite" de $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{\lambda}{n}\right)$.
- Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.