DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 6

PSI2 2023-2024 **Durée: 3 heures** **10/02/2024**

EXERCICE 1

Une transformée de Laplace

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.

1. Montrer que les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto t\,f(t)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Pour $x \geq 0$, on pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

3. Montrer que la fonction φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+$, et qu'elle est continue sur cet intervalle.

4. Montrer que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Montrer que $\varphi''(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{x^2+1}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

6. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

7. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

8. Expliciter $\varphi'(x)$, puis $\varphi(x)$ pour $x > 0$.

9. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

10. En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

EXERCICE 2

Questions de cours. Rappeler l'énoncé de la version matricielle du théorème spectral. Rappeler les définitions de matrice symétrique “positive” et “définie positive”, ainsi que leur caractérisation spectrale (*sans démonstration*).

1. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. En utilisant le théorème spectral, montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = R^\top R = A$.

2. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad AX = 0 \iff X^\top AX = 0\,.$$

On pourra pour cela utiliser la question **1.**

3. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives. Montrer que

$$\mathrm{Ker}(A+B) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)\,.$$

On pourra pour cela utiliser la question **2.**

4. Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. En déduire que la matrice AB est diagonalisable.

PROBLÈME

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot|\cdot)$. Ainsi, le produit scalaire de deux matrices-colonnes X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on identifiera à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, est noté $(X|Y)$. On rappelle que $(X|Y) = X^\top Y$. On notera $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne associée: pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\|X\|_2 = \sqrt{(X|X)}$.

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal constitué des matrices orthogonales d'ordre n, on notera $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$ le groupe spécial orthogonal constitué des matrices orthogonales de déterminant positif, que l'on peut aussi noter $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. Enfin, on notera $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de déterminant négatif.

PARTIE A. Quelques propriétés des matrices orthogonales

A.1. Quel est le déterminant d'une matrice de $\mathrm{O}_n^+(\mathbb{R})$? de $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$? On justifiera les réponses.

A.2. Montrer que les valeurs absolues des coefficients d'une matrice orthogonale sont inférieures ou égales à 1.

A.3. Déterminer la trace maximale d'une matrice de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

A.4. Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Que peut-on dire de ses valeurs propres réelles ?

A.5. Soit $U \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$. Montrer que le réel -1 est valeur propre de U.

A.6. Montrer que, si F est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien E stable par un automorphisme orthogonal u de E, alors son orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u.

A.7. Montrer que, pour tout $W \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $W_1 \in \mathrm{O}_{n-1}^+(\mathbb{R})$ telles que

$$W = P \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix} P^\top ,$$

où $0_{k,l}$ désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_{k,l}(\mathbb{R})$.

A.8. En déduire la trace maximale d'une matrice de $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$.

PARTIE B. Bases isométriques

Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. On considère deux bases de $\mathbb{R}^n$, notées respectivement $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$ et $\mathcal{Y} = (y_1, \cdots, y_n)$. L'objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ces deux bases soient "isométriques", c'est-à-dire pour qu'il existe une isométrie u de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad u(x_i) = y_i \ .$$

Nous noterons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, le vecteur x_i est représenté dans la base $\mathcal{B}_0$ par une matrice-colonne $X_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et, de la même façon, le vecteur y_i est représenté par une matrice-colonne $Y_i \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note enfin X la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont $X_1, \cdots, X_n$ et, de même, Y la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont $Y_1, \cdots, Y_n$.

B.1. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, exprimer le coefficient $x_{i,j}$ d'indices (i, j) de la matrice X comme un produit scalaire.

B.2. Justifier que les matrices carrées X et Y sont inversibles.

B.3. Exprimer le coefficient d'indices (i, j) de la matrice $X^\top X$ comme un produit scalaire.

B.4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les matrices $X^\top X$ et $Y^\top Y$ pour qu'il existe une matrice orthogonale U telle que $Y = UX$.

B.5. En déduire que les bases $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont isométriques si et seulement si

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \qquad (x_i|x_j) = (y_i|y_j) \ .$$

PARTIE C: Un problème d'optimisation

C.1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en posant, pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\big)^2$,

$$< A, B > = \operatorname{tr}(A^\top B) \ .$$

Donner une expression simple de ce produit scalaire $< A, B >$ à l'aide des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ des matrices A et B.

On notera $|||\cdot|||$ la norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associée à ce produit scalaire.

C.2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont notées respectivement $A_1, \cdots, A_n$ et $B_1, \cdots, B_n$. Prouver la relation $< A, B > = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (A_j|B_j)$.

C.3. Que vaut $|||U|||$ si $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une matrice orthogonale ?

C.4. Soit $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Simplifier les expressions

$$< UA, UB > \quad ; \qquad |||UA||| \quad ; \qquad < AU, BU > \quad ; \qquad |||AU||| \ .$$

La suite de cette partie tente une généralisation de l'étude faite dans la **PARTIE B.** On se donne $2n$ matrices-colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, notées $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$ (que l'on pourra identifier à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$). On notera X (respectivement Y) la matrice carrée d'ordre n dont les colonnes sont $X_1, \cdots, X_n$ (respectivement $Y_1, \cdots, Y_n$).

Comme le montre la **PARTIE B**, il n'existe pas toujours de matrice orthogonale $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $UX = Y$. On cherchera alors une matrice orthogonale U telle que la "distance" de UX à Y soit la plus petite possible, autrement dit on cherchera à minimiser l'expression $|||UX - Y|||$.

C.5. Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée et bornée de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C.6. En déduire l'existence d'une matrice $U_0 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$|||U_0X - Y||| = \min_{U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})} |||UX - Y||| \ .$$