CORRIGÉ du D.S. de MATHÉMATIQUES numéro 6
PSI2 2023-2024

EXERCICE 1

Une transformée de Laplace (*librement inspiré de CCP 2009 PSI*)

1. Du développement limité $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$ au voisinage de 0, on déduit $\displaystyle\lim_{t\to 0} f(t) = \frac{1}{2}$.

De $0 \leq f(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$, on déduit $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. La fonction f est donc bornée au voisinage de 0 et au voisinage de $+\infty$, disons sur $]0, a]$ et sur $[b, +\infty[$ avec $0 < a < b$. Comme elle est continue sur le segment $[a, b]$, elle est aussi bornée sur ce segment. Finalement, elle est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Même raisonnement avec $g : t \mapsto t\, f(t)$, puisque $\displaystyle\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$.

2. La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = \dfrac{1}{2}$, et on a $f(t) = O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$, donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

3. Posons $u(x, t) = \dfrac{1 - \cos(t)}{t^2}\, e^{-xt}$ pour $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$, ce qui entraîne la continuité des applications partielles, et on a la domination

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \qquad \big|u(x, t)\big| \leq f(t)\ ,$$

avec f continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètre permet d'affirmer l'existence et la continuité de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x, t)\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}_+$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application partielle $x \mapsto u(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{1 - \cos(t)}{t}\, e^{-xt} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \big(1 - \cos(t)\big)\, e^{-xt}\ .$$

- ces dérivées partielles sont continues (par morceaux) par rapport à la variable t ;

- l'application $t \mapsto \dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\dfrac{1 - \cos(t)}{t}\, e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x > 0$, car prolongeable par continuité avec la valeur 0 en 0, et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x, t) = O(e^{-xt})$ lorsque $t \to +\infty$;

- enfin si $S = [a, b]$ est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$, on a la domination

$$\forall (x, t) \in S \times \mathbb{R}_+^* \qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)\right| \leq 2\, e^{-at}\ ,$$

et la fonction $\psi_S : t \mapsto 2\, e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On peut donc affirmer que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t}\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \varphi''(x) = \int_0^{+\infty} \big(1 - \cos(t)\big)\, e^{-xt}\,\mathrm{d}t\ .$$

5. En utilisant $\cos(t) = \mathrm{Re}(e^{it})$, on calcule

$$\begin{aligned}
\varphi''(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-x)t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\left[\frac{e^{(i-x)t}}{i - x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}\right)\\
&= \frac{1}{x} + \mathrm{Re}\left(\frac{1}{i - x}\right) = \frac{1}{x} - \mathrm{Re}\left(\frac{x + i}{x^2 + 1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1}\ .
\end{aligned}$$

6. Les fonctions f et $g : t \mapsto t\, f(t)$ étant bornées sur $\mathbb{R}_+$, on a facilement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\big|\varphi'(x)\big| = \left|\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\|g\|_\infty}{x} \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi(x)\big| = \left|\int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-xt}\, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{x}\ ,$$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$.

7. On a $\displaystyle\int^x \ln(1+t^2)\, \mathrm{d}t = \int^x 1\cdot\ln(1+t^2)\, \mathrm{d}t = x\cdot\ln(1+x^2) - \int^x t\cdot\frac{2t}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$. Dans l'intégrale du second membre, on écrit au numérateur $2t^2 = 2(t^2+1) - 2$ (*astuce!*), on obtient après réduction sur feu moyen

$$\int^x \ln(1+t^2)\, \mathrm{d}t = x\ \ln(1+x^2) - 2x + 2\ \mathrm{Arctan}(x) + C\ .$$

8. De **5.**, on déduit $\varphi'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ \ln(x^2+1) + C_1$. De $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi'(x) = 0$, on déduit $C_1 = 0$, car $\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ \ln(x^2+1) = -\dfrac{1}{2}\ \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Puis, en utilisant **7.**, après quelques calculs,

$$\varphi(x) = -\frac{x}{2}\ \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}(x) + C_2\ ,$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$ donne $C_2 = \dfrac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \varphi(x) = x\ \ln(x) - \frac{1}{2}x\ \ln(1+x^2) - \mathrm{Arctan}(x) + \frac{\pi}{2}\ .$$

9. La fonction φ est continue en 0 (question **3.**), donc $I = \varphi(0) = \lim\limits_{x\to0^+} \varphi(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

10. Intégrons par parties:

$$I = \int_0^{+\infty} \big(1-\cos(t)\big)\ \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\ \big(1-\cos(t)\big)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t\ .$$

Cette i.p.p. est justifiée par le fait que la fonction entre crochets admet des limites finies (nulles) en 0 et en $+\infty$. On en déduit la convergence de l'intégrale J et l'égalité $J = I = \dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE 2

1. On sait qu'il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ avec les λ_i réels positifs, tels que $A = PDP^{-1} = PDP^\top$. En posant $\Delta = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ puis $R = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^\top$, de $\Delta^2 = D$, on déduit $R^2 = P\Delta^2P^{-1} = A$. Enfin, $R^\top = (P\Delta P^\top)^\top = P\Delta^\top P^\top = R$ donc R est symétrique, et elle est positive puisque ses valeurs propres sont les réels positifs $\sqrt{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq n$.

2. L'implication $AX = 0 \Longrightarrow X^\top AX = 0$ est triviale. Réciproquement, si $X^\top AX = 0$, alors $X^\top R^\top RX = 0$, soit $(RX)^\top(RX) = 0$, soit $\|RX\|^2 = 0$, donc $RX = 0$ puis $AX = RRX = 0$.

3. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Si $X \in \mathrm{Ker}(A)\ \cap\ \mathrm{Ker}(B)$, alors $AX = BX = 0$, on en déduit que $(A+B)X = AX + BX = 0$, on a donc l'inclusion $\mathrm{Ker}(A)\ \cap\ \mathrm{Ker}(B) \subset \mathrm{Ker}(A+B)$.

Réciproquement, si $X \in \mathrm{Ker}(A+B)$, alors $AX + BX = 0$ donc $X^\top AX + X^\top BX = 0$. C'est une somme de deux termes positifs, on en déduit que $X^\top AX = X^\top BX = 0$, puis que $AX = BX = 0$ d'après la question **1.** Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(A+B) \subset \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$.

4. Pour l'existence de R, on procède comme à la question **1.**, la matrice R obtenue par le même procédé est maintenant définie positive puisque ses valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$ qui sont ici strictement positifs.

La suite est un peu plus subtile. Comme R est symétrique définie positive, elle est inversible (en effet, 0 n'est pas valeur propre de R). On écrit alors $AB = R^2B = R(RBR)R^{-1}$, ceci montre que la matrice AB est semblable à la matrice RBR. Or, RBR est symétrique puisque $(RBR)^\top = R^\top B^\top R^\top = RBR$, donc elle est diagonalisable par le théorème spectral. Enfin, une matrice semblable à une matrice diagonalisable est aussi diagonalisable, ce qui permet de conclure.

PROBLÈME

d'après Centrale PC, 2011

Partie A - Quelques propriétés des matrices orthogonales

A.1. De la relation $A^\top A = I_n$, on déduit $(\det A)^2 = 1$, donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Si $A \in \mathrm{O}_n^+(\mathbb{R}) = \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, on a donc $\det(A) = +1$ et, si $A \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, on a $\det(A) = -1$.

A.2. Si $A = (a_{i,j})$ est orthogonale, alors la somme des carrés des coefficients de chaque colonne vaut 1, cela entraîne $a_{i,j}^2 \leq 1$ pour tout couple (i,j), soit $|a_{i,j}| \leq 1$.

A.3. Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a donc $\mathrm{tr}(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \leq n$, et cette valeur est atteinte pour $A = I_n$.

A.4. Si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1, 1\}$. En effet, si λ est une valeur propre réelle de A, si $X \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre associé ($X \neq 0$ et $AX = \lambda X$), alors on a d'une part $\|AX\|_2^2 = (AX|AX) = (AX)^\top(AX) = X^\top A^\top AX = X^\top I_n X = X^\top X = \|X\|_2^2$, mais aussi $\|AX\|_2^2 = \|\lambda X\|_2^2 = \lambda^2\,\|X\|_2^2$ et, puisque X est non nul, $\lambda^2 = 1$.

A.5. Si $U \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, alors $\det(U) = -1$, et

$$\det(U + I_n) = \det(U + U^\top U) = \det\big((I_n + U^\top)U\big) = \det(I_n + U)\cdot\det(U) = -\det(U + I_n)\ .$$

Donc $\det(U + I_n) = 0$, ce qui signifie que-1 est valeur propre de U.

A.6. C'est une démonstration de cours: on a d'abord $u(F) \subset F$ car F est supposé stable par l'endomorphisme u. Mais u est un automorphisme de E donc conserve les dimensions, donc $\dim\big(u(F)\big) = \dim(F)$, puis $u(F) = F$.

Soit alors $x \in F^\perp$, montrons que $u(x) \in F^\perp$. Pour cela, soit $y \in F$, on a alors $y \in u(F)$ d'après ce qui précède, donc il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$. Puis

$$\big(u(x)|y\big) = \big(u(x)|u(z)\big) = (x|z) = 0$$

car $x \in F^\perp$ et $z \in F$. Donc $F^\perp$ est stable par u.

A.7. Soit $W \in \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$, soit w l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé, alors w est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire canonique. De **A.5.**, on déduit que le réel -1 est valeur propre de la matrice W, donc de l'endomorphisme w ; soit alors e_1 un vecteur propre unitaire associé. La droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(e_1)$ de $\mathbb{R}^n$ est stable par w, son orthogonal $H = D^\perp$ est donc aussi stable par w d'après **A.6.**, et l'endomorphisme w_1 de H induit par w est toujours une isométrie (on a toujours conservation de la norme des vecteurs), donc est représenté dans une base orthonormale $(e_2, \cdots, e_n)$ de H par une matrice orthogonale $W_1 \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$. Enfin, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle w est représenté par la matrice $W' = \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & W_1 \end{pmatrix}$, donc $W = PW'P^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}$. Cette matrice P est orthogonale puisque c'est la matrice de passage d'une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ (la base canonique) vers une autre base orthonormale, on a donc aussi $W = PW'P^\top$. Enfin, on a

$$-1 = \det(W) = \det(W') = -\det(W_1) \ ,$$

donc $\det(W_1) = +1$ et on a bien $W_1 \in \mathrm{O}^+_{n-1}(\mathbb{R})$.

A.8. Soit $W \in \mathrm{O}^-_n(\mathbb{R})$. Écrivons $W = PW'P^{-1}$ avec $W' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & W_1 \end{pmatrix}$ et $W_1 \in \mathrm{O}^+_{n-1}(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{tr}(W) = \mathrm{tr}(W') = -1 + \mathrm{tr}(W_1) \leq -1 + (n-1) = n-2$ d'après **A.3.**, et cette valeur est atteinte en prenant $W_1 = I_{n-1}$, soit par exemple avec $W = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, \cdots, 1)$.

Partie B - Bases isométriques

B.1. $x_{i,j}$ est la i-ème coordonnée du vecteur x_j dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ qui est orthonormale, donc $x_{i,j} = (e_i|x_j)$.

B.2. Les familles de vecteurs $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des bases, donc les matrices X et Y sont de rang n (les colonnes sont linéairement indépendantes), elles sont inversibles. En fait, X et Y sont des matrices de passage:

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{X}) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{X}} \qquad \text{et} \qquad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{Y}) = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{Y}} \ .$$

B.3. On a $(X^\top X)_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_{k,i}x_{k,j} = (x_i|x_j)$: en effet, on reconnaît la somme des produits deux à deux des coordonnées des vecteurs x_i et x_j dans la base canonique (qui est orthonormale), c'est donc le produit scalaire de ces deux vecteurs. *La matrice $X^\top X$ est donc la matrice de Gram de la famille de vecteurs $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_n)$.*

B.4. La CNS recherchée est l'égalité $X^\top X = Y^\top Y$. En effet,

- s'il existe U orthogonale telle que $Y = UX$, alors

$$Y^\top Y = (UX)^\top UX = X^\top U^\top UX = X^\top I_n X = X^\top X \ .$$

- si $X^\top X = Y^\top Y$, posons $U = YX^{-1}$, on a alors $Y = UX$, et U est orthogonale puisque

$$U^\top U = (YX^{-1})^\top YX^{-1} = (X^{-1})^\top Y^\top YX^{-1} = (X^\top)^{-1}(Y^\top Y)X^{-1} = (X^\top)^{-1}X^\top XX^{-1} = I_n \ .$$

B.5. Les bases $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont isométriques si et seulement s'il existe une isométrie u telle que $u(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, ce qui se traduit matrciellement par l'existence d'une matrice orthogonale U telle que $UX_i = Y_i$ pour tout i, c'est-à-dire telle que $UX = Y$. Et on vient de voir que cette condition est réalisée si et seulement si $X^\top X = Y^\top Y$, c'est-à-dire si et seulement si $(x_i|x_j) = (y_i|y_j)$ pour tout couple (i, j).

Partie C - Un problème d'optimisation

C.1. C'est du cours: on a bien une forme bilinéaire (évident), symétrique car

$$< A, B >= \mathrm{tr}(A^\top B) = \mathrm{tr}\big((A^\top B)^\top\big) = \mathrm{tr}(B^\top A) =< B, A > \ .$$

On note ensuite que $< A, B >= \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j}$ (*calcul laissé au lecteur*), on a donc $< A, A >= \sum_{i,j} a_{i,j}^2 \geq 0$ (caractère positif) et, si $< A, A >= 0$, alors $\sum_{i,j} a_{i,j}^2 = 0$ et, comme c'est une somme de termes positifs, elle est nulle si et seulement si chaque terme est nul, cela entraîne donc $A = 0$ (caractère défini).

On pose alors $|||A||| = \sqrt{< A, A >} = \sqrt{\mathrm{tr}(A^\top A)}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C.2. Il suffit d'écrire

$$< A, B >= \sum_{i,j} a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} (A_j | B_j) \ .$$

C.3. Si $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors $|||U|||^2 = \mathrm{tr}(U^\top U) = \mathrm{tr}(I_n) = n$, donc $|||U||| = \sqrt{n}$.

C.4. On a $< UA, UB >= \mathrm{tr}\big((UA)^\top UB\big) = \mathrm{tr}(A^\top U^\top UB) = \mathrm{tr}(A^\top B) =< A, B >$ car $U^\top U = I_n$. Donc $|||UA||| = |||A|||$. En utilisant la propriété $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$, on a aussi

$$< AU, BU >= \mathrm{tr}\big((AU)^\top BU\big) = \mathrm{tr}(U^\top A^\top BU) = \mathrm{tr}(A^\top BUU^\top) = \mathrm{tr}(A^\top B) =< A, B > ,$$

donc $|||AU||| = |||A|||$.

C.5. On a vu en **C.3.** que, pour toute matrice $U \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, on a $|||U||| = \sqrt{n}$, donc $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, par exemple parce qu'elle est incluse dans la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$.

Soit $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, supposée convergente, i.e. $\lim_{k\to+\infty} U_k = U$. On a $U_k^\top U_k = I_n$ pour tout k. Mais la transposition (i.e. l'application $M \mapsto M^\top$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers lui-même) est une application linéaire en dimension finie, elle est donc continue. De $\lim_{k\to+\infty} U_k = U$, on tire alors $\lim_{k\to+\infty} U_k^\top = U^\top$. Enfin, par continuité du produit matriciel (puisque celui-ci est bilinéaire en dimension finie), on a $\lim_{k\to+\infty} U_k^\top U_k = U^\top U$. On en déduit que $U^\top U = I_n$, la matrice U est donc orthogonale. On vient de prouver que l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est "stable par passage à la limite", c'est donc une partie fermée. *On pouvait aussi raisonner sur les relations que doivent vérifier les coefficients des matrices.*

C.6. Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to \mathbb{R} \\ M & \mapsto |||MX - Y||| \end{cases}$. Cette application est continue comme composée d'applications continues (en effet, $M \mapsto MX$ est continue par continuité du produit matriciel, et $N \mapsto |||N|||$ est continue car une norme est toujours 1-lipschitzienne donc continue). Cette application continue φ à valeurs réelles présente donc un minimum sur la partie fermée bornée $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ d'après le théorème des bornes atteintes généralisé. Il existe donc $U_0 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(U_0) = \min_{U\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})} \varphi(U)$.