PROBLÈME 1

Dans tout ce problème, on notera $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Ainsi, si $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^n$, on a $(X|Y) = X^\top Y$ et $\|X\|^2 = X^\top X$.

On admettra que, si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors les matrices AB et BA ont le même polynôme caractéristique: $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

PARTIE A. Décomposition en valeurs singulières

Dans cette partie, on fixe un entier $n \geq 2$, une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et on pose $r = \text{rg}(A)$. On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ sont A et $A^\top A$ respectivement.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) = \text{Ker}(g)$, puis que $\text{rg}(A^\top A) = r$.

2. Montrer que $A^\top A$ et $AA^\top$ sont des matrices symétriques positives.

3. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales $P, Q \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telles que

$$A^\top A = PDP^\top \qquad \text{et} \qquad AA^\top = QDQ^\top \; .$$

4. Montrer que la matrice D possède exactement r termes diagonaux non nuls.

On supposera par la suite que $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ sont non nuls, et que $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Les λ_i étant positifs ou nuls d'après **Q2.**, on peut poser $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ces réels positifs σ_i sont appelés les **valeurs singulières** de la matrice A, ce sont donc les racines carrées des valeurs propres de $A^\top A$. Pour la suite, on notera $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$.

5. Soient U et V deux matrices orthogonales. Montrer que les matrices UAV et A ont les mêmes valeurs singulières.

6. Dans cette question seulement, on suppose que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle. Quel lien y a-t-il entre les valeurs singulières de A et ses valeurs propres ?

7.a. Montrer l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}_1 = (X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

(1): $\forall i \in [\![1, r]\!] \quad A^\top A X_i = \lambda_i X_i$;

(2): $(X_{r+1}, \cdots, X_n)$ est une base de $\text{Ker}(f)$.

b. Montrer que la famille $(AX_1, \cdots, AX_r)$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, puis que c'est une base de $\text{Im}(f)$.

c. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, calculer $\|AX_i\|$.

d. Montrer qu'il existe une base orthonormale $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(f) = \Delta$.

e. Montrer qu'il existe deux matrices orthogonales P_1 et P_2 telles que

$$A = P_1 \, \Delta \, P_2 \; .$$

On dit que cette écriture est une **décomposition en valeurs singulières** de la matrice A.

8. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'elles ont les mêmes valeurs singulières si et seulement s'il existe deux matrices orthogonales U et V telles que $B = UAV$.

PARTIE B. Vecteurs singuliers

9. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont on notera $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ les valeurs singulières, maintenant indexées dans l'ordre croissant: $0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \cdots \leq \sigma_n$.

a. Vérifier, pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, la relation $\|AX\|^2 = (X \mid A^\top AX)$.

b. En déduire l'encadrement

$$\forall X \in \mathbb{R}^n \qquad \sigma_1 \|X\| \leq \|AX\| \leq \sigma_n \|X\| .$$

c. Montrer que $\sigma_1 = \min\limits_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ et $\sigma_n = \max\limits_{X\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$.

d*. Montrer que $\left\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} \; ; \; X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\} = [\sigma_1, \sigma_n]$.

10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit σ un réel positif. Montrer que σ est une valeur singulière de A si et seulement s'il existe deux vecteurs X et Y de $\mathbb{R}^n$, unitaires, tels que

$$AX = \sigma Y \qquad \text{et} \qquad A^\top Y = \sigma X .$$

On traitera à part le cas $\sigma = 0$.

On dit alors que X est un **vecteur singulier à droite**, que Y un **vecteur singulier à gauche** et que (Y, X) est un **couple de vecteurs singuliers** de A, pour σ.

11. Que représentent les vecteurs singuliers de A pour les matrices $A^\top A$ et $AA^\top$?

12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soient (Y_1, X_1) et (Y_2, X_2) deux couples de vecteurs singuliers de A, pour deux valeurs singulières distinctes σ_1 et σ_2. Montrer que les vecteurs X_1 et X_2 sont orthogonaux, ainsi que les vecteurs Y_1 et Y_2.

13. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & -11 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer $A^\top A$. Déterminer les valeurs singulières de A puis, pour chacune d'elles, un couple de vecteurs singuliers. En déduire une décomposition en valeurs singulières de la matrice A.

14. Mêmes questions avec la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

PROBLÈME 2

PARTIE A. Calculs utilisant des séries entières.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} \dbinom{2n}{n} x^n$, et montrer que

$$\forall x \in \,]-R, R[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

2. Montrer que

$$\forall x \in \,]-R, R[\,\setminus\{0\} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} .$$

3. En déduire, pour $x \in]-R, R[\setminus\{0\}$, une expression simple de

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n .$$

4. Montrer que, pour tout n entier naturel,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} .$$

5. En utilisant la question **2.**, calculer la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,4^n} \binom{2n}{n}$.

PARTIE B. Égalisations au jeu de pile ou face infini.

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0,1[$. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p, sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement "le n-ième lancer donne pile" et $[X_n = 0]$ désigne l'événement "le n-ième lancer donne face". On pose $q = 1 - p$.

On pose $A_0 = \Omega$, et on définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements

A_n: "à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces"

B_n: "à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces".

Par exemple, si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit

C: "au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces".

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_{2n}$. En déduire $P(A_n)$.

7. Montrer que les événements B_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont deux à deux incompatibles.

8. Montrer que C est un événement, et que $P(C) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver la relation $P(A_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(B_k)\, P(A_{n-k})$.

10. En déduire, par récurrence forte, la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad P(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} (pq)^n .$$

11. Dans cette question, on suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Montrer que $P(C) = 1 - \sqrt{1 - 4pq}$.

12. Dans cette question, on suppose $p = \dfrac{1}{2}$. Montrer que C est un événement presque sûr.