DEVOIR SURVEILLÉ de MATHÉMATIQUES numéro 6
COMMENTAIRES
PSI2 2023-2024

EXERCICE 1

1. Peu de réponses correctes et complètes à cette première question. Il fallait observer que les fonctions f et $g : t \mapsto t\, f(t)$ admettent des limites finies en 0 et en $+\infty$, donc sont bornées **au voisinage de** 0 et de $+\infty$, i.e. sur des intervalles de la forme $]0, \varepsilon]$ et $[A, +\infty[$ avec $0 < \varepsilon < A$, et ensuite mentionner le **théorème des bornes atteintes** pour dire que f et g sont **continues** sur le **segment** $[\varepsilon, A]$, donc sont aussi bornées sur ce segment.

Majorer la valeur absolue par $\dfrac{2}{t^2}$ n'est pas suffisant puisque $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ n'est elle-même pas bornée au voisinage de zéro!

2. Ici non plus, il ne suffit pas de majorer $\big|f(t)\big|$ par $\dfrac{2}{t^2}$ puisque $t \mapsto \dfrac{2}{t^2}$ n'est pas intégrable en 0.

3. Question finalement plutôt mieux réussie que les précédentes, à condition de penser à majorer par $f(t)$ pour la domination.

4. Un certain nombre d'erreurs de rédaction (confusion des variables, domination par une expression qui dépend encore du paramètre x). La vérification de l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \dfrac{\partial}{\partial x}\big(f(t)e^{-xt}\big)$ est souvent oubliée.

6. Si on veut absolument utiliser le théorème de convergence dominée à paramètre continu, alors il faut... une domination!

Mais il me semble bien plus simple ici de majorer directement $\big|\varphi'(x)\big|$ et $\big|\varphi(x)\big|$, *cf.* corrigé.

8. L'oubli (bien trop fréquent!!) des constantes d'intégration fait perdre à peu près toute valeur à cette question!

En résumé, les techniques d'analyse, même celles de première année (montrer qu'une fonction est bornée en se ramenant à un segment pour appliquer un théorème du cours, obtention d'une primitive **à une constante près**), sont encore insuffisamment maîtrisées.

EXERCICE 2

Q.C. Il serait judicieux, pour la notion de matrice symétrique positive (ou définie positive) de bien distinguer ce qui est **définition** (le fait que $X^\top AX$ est positif pour tout X) de ce qui est **caractérisation** (les valeurs propres sont positives)...

... et de bien mettre en valeur qu'une **caractérisation**, c'est une condition **nécessaire et suffisante**, autrement dit un **si et seulement si**! Une rédaction du style: “<u>**si**</u> $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, <u>**alors**</u> $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$” ne peut donc pas emporter la totalité des points.

1. et 2. Questions traitées en TD, en général correctement restituées.

3. Un assez grand nombre de réponses correctes.

4. Personne n'a su prouver que AB est diagonalisable!

PROBLÈME

Un sujet de Centrale, déjà pas mal amputé initialement, et finalement le DS se déroulant en 3 heures au lieu de 4, il n'en restait plus que quelques questions préliminaires! Suffisamment pour voir que le cours sur les isométries et matrices orthogonales est globalement très mal assimilé. Les confusions sont en effet très nombreuses (égalités entre des objets de nature différente, indexations incohérentes dans des calculs de sommes). Toute l'algèbre est donc à travailler sérieusement avant les écrits!

A.3. Beaucoup d'entre vous montrent que $\mathrm{tr}(A) \leq n$ si $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, donc la valeur n est un **majorant** de la trace des matrices orthogonales. Pour affirmer que le **maximum** de la trace est n, il faut exhiber une matrice orthogonale dont la trace vaut n exactement (ce n'est pas difficile!), i.e. montrer que ce majorant est "atteint".

A.5. ATTENTION! La formule disant que le déterminant est le produit des valeurs propres comptées avec leur multiplicité s'applique pour une matrice (ou un endomorphisme) dont le polynôme caractéristique est scindé, i.e. pour une matrice trigonalisable. Or, rien ne dit qu'une matrice orthogonale est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ (ce résultat est faux!), il faudrait donc tenir compte aussi des valeurs propres complexes pour appliquer cette formule, ou la formule analogue donnant la trace comme somme des valeurs propres.

A.6. Dans presque toutes les copies, il y a une erreur de logique... que j'attendais bien évidemment! Si on se donne $x \in F^{\perp}$, il faut montrer que $u(x)$ est orthogonal **à tout** vecteur de F. Or on obtient facilement $\big(u(x)|u(y)\big) = 0$ pour tout $y \in F$, il faut donc montrer que, lorsque y décrit F, alors $u(y)$ **décrit** F **tout entier**! L'argument est que $u(F) = F$ car u est injectif donc conserve les dimensions. Ce passage, qui était pourtant une question de cours récente dans les programmes de colles, a rarement été bien compris.

A.7. ATTENTION! Une matrice orthogonale n'est pas toujours diagonalisable sur $\mathbb{R}$, ce serait trop facile :)

B.1. Que d'erreurs dans cette question: souvent une interversion des indices i et j, d'autres veulent faire intervenir un endomorphisme u mais il n'y a pas d'endomorphisme u dans l'énoncé (*ou alors, c'est que vous ne savez pas lire un énoncé* !).

B.2. Pas mal de réponses correctes.

B.3. Là, en revanche, très peu de réponses correctes, ou alors pas sous la forme demandée: il est vrai que $(X^\top X)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}(e_k|x_i)(e_k|x_j)$, mais peu d'entre vous ont reconnu dans cette écriture le produit scalaire $(x_i|x_j)$. Des erreurs aussi sur le format des matrices (confusions entre matrices carrées et matrices-colonnes).

B.4. et B.5. Questions peu traitées.

C.1. Question de cours, pas toujours très bien restituée (des sommes indexées de façon incohérente par exemple).

C.2., C.3. et C.4. Questions faciles... à condition d'avoir survécu jusque-là!

C.5. et C.6. C'est plus difficile...