COLLES de MATHÉMATIQUES **PSI2 2023-2024**

Semaine 18 : du 04/03 au 08/03

Probabilités

Notion de variable aléatoire discrète (*les seules au programme*), loi d'une telle variable aléatoire.

Loi géométrique. Définition. Interprétation comme "temps d'attente d'un succès".

Loi de Poisson. Interprétation comme "loi des événements rares".

Couples ou n-uplets de variables aléatoires, loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle d'une variable aléatoire sachant un événement (de probabilité non nulle).

Variables aléatoires indépendantes (familles finies). Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes, extension au cas de n variables. Lemme des coalitions. Suites de variables i.i.d. (indépendantes identiquement distribuées).

Variables aléatoires discrètes réelles ou complexes d'espérance finie, définition de l'espérance. Formule de transfert. Linéarité, positivité, croissance de l'espérance. Espace vectoriel $L^1(\Omega)$ des v.a. discrètes d'espérance finie. Inégalité triangulaire $\big|\mathrm{E}(X)\big| \leq \mathrm{E}\big(|X|\big)$.

Comparaison: si $|X| \leq Y$ et $Y \in L^1(\Omega)$, alors $X \in L^1(\Omega)$.

Si $X(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n) \in [0, +\infty]$.

Si $X, Y \in L^1(\Omega)$ sont indépendantes, alors $XY \in L^1(\Omega)$ et $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.

Espace vectoriel $L^2(\Omega)$ des v.a. réelles discrètes X "admettant un moment d'ordre deux", i.e. telles que X^2 est d'espérance finie, inclusion $L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

Variance de X pour $X \in L^2(\Omega)$. Formule de Koenig-Huygens. Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$. Définition de l'écart-type. Cas où $\mathrm{V}(X) = 0$.

Covariance de X et Y (si X et Y sont dans $L^2(\Omega)$). L'application $(X, Y) \mapsto \mathrm{E}(XY)$ et la covariance sont des formes bilinéaires symétriques positives sur $L^2(\Omega)$, inégalités de Cauchy-Schwarz associées. Deux variables indépendantes sont décorrélées (réciproque fausse). Variance d'une somme.

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Elle détermine la loi. Propriétés. Exemples des lois usuelles. Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.

Démonstrations de cours ou proches du cours

- Propriété de sous-additivité d'une probabilité.
- Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation comme loi des événements rares: "loi-limite" de $\mathcal{B}\Big(n, \dfrac{\lambda}{n}\Big)$.
- Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.
- Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$ pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- Si X^2 est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. L'ensemble $L^2(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes.